Tentamen
Lineaire Analyse (151124)

Datum: 26-01-2011
Plaats: SC
Tijd: 13:45-16:45

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Een rekenmachine mag niet gebruikt worden.

1. Beschouw de vectorruimte $\mathbb{V} := \operatorname{span}\{e^{-t}, te^{-t}\}$ als deelruimte van $\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Op deze deelruimte definiëren we de afbeelding

$$(\mathcal{A}f)(t) = f(t+1) \tag{1}$$

dus een verschuivingsoperator.

   (a) Toon aan dat $\mathcal{A}$ een lineaire afbeelding is van $\mathbb{V}$ naar $\mathbb{V}$.

   (b) Bepaal de matrix A_{SS} van de afbeelding, waarbij $S = \{e^{-2t}, te^{-2t}\}$ een basis is van $\mathbb{V}$.

   (c) Bepaal alle eigenwaarden en eigenvectoren van $\mathcal{A}$. Schrijf de eigenvectoren als elementen van $\mathbb{V}$.

2. Beschouw de ruimte $\mathscr{P}_2([0,1];\mathbb{R})$ van polynomen van graad hooguit 2. Verder definiëren we

$$\mathbb{W} = \{\, f \in \mathscr{P}_2([0,1];\mathbb{R}) \mid f^{(1)}(0) = f^{(2)}(0) \,\}.$$

   (a) Toon aan dat $\mathbb{W}$ een deelruimte is van $\mathscr{P}_2([0,1];\mathbb{R})$.

   (b) Bepaal een basis van $\mathbb{W}$.

   Op $\mathscr{P}_2([0,1];\mathbb{R})$ nemen we het inproduct $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$.

   (c) Bepaal een orthonormale basis van $\mathbb{W}$.

   (d) Bepaal de beste benadering in $\mathbb{W}$ van $f(t) = t$.

3. Geef de definitie van *maximaal orthonormaal stelsel* (Engels: *complete orthonormal set/basis*).

4. Beschouw de ruimte $\mathbb{X}$ van periodieke continue functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ met periode $T = 1$. Zij verder de lineaire afbeelding $\mathcal{A} : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ gedefinieerd als $(\mathcal{A}f)(t) = f(t + 1/2)$. Op $\mathbb{X}$ nemen we het inproduct

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 (1 + t) f(t) g(t) \, dt.$$

   (a) Laat zien dat dit inderdaad een inproduct is op $\mathbb{X}$.

   (b) Toon aan dat $\|\mathcal{A}\| < \infty$ t.o.v. dit inproduct.

   (c) Bepaal de geadjungeerde $\mathcal{A}^*$ t.o.v. dit inproduct.

   (d) Bepaal de eigenwaarden van $\mathcal{A}$.

5. Beschouw de ruimte

$$\ell^1(\mathbb{N}; \mathbb{C}) := \{x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mid x_k \in \mathbb{C} \, \forall k \in \mathbb{N} \text{ en } \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty\}.$$

Toon aan dat

$$\|x\| := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{k}$$

een norm is op deze ruimte.

6. Bewijs of geef een tegenvoorbeeld voor de volgende bewering:

   Gegeven is een basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ van een eindig-dimensionale vectorruimte. Dan heeft elke x uit die vectorruimte een unieke coördinatenvector met betrekking tot die basis?

opgave:	1	2	3	4	5	6
punten:	7+6+5	6+7+7+6	6	6+7+8+5	7	6

Het totaal aantal punten is 90. Het tentamencijfer is $1 + p/10$ met p het behaalde aantal punten.