

Datum: 21 juni 2007

Tentamen Markovketens (153065)
Vrijdag 22 juni 2007, 9.00 - 12.00 uur.

Dit tentamen bevat 3 opgaven
Gebruik van het boek is toegestaan
Vermeld ook uw studentnummer op werk en tentamenbriefje
Motiveer uw antwoorden

1. Op een warme zomerdag nuttigt u het middagmaal buiten. Helaas wordt u gestoord door insecten, die op uw eten afkomen volgens een Poisson proces met intensiteit 12 per uur. Met kans $1/3$ is elk van deze insecten een wesp. Verder is bekend dat het laatste insect vóór 12.00 uur zich om 11.57 uur aandiente.
 - a. Wat is de kans dat u tussen 12.00 uur en 12.10 uur niet wordt lastig gevallen door insecten?
 - b. Hoe laat verwacht u het volgende insect na 12.00 uur?
 - c. Wat is de kans dat u tussen 12.00 uur en 12.15 uur door precies 1 wesp en 3 andere insecten wordt gestoord?
 - d. Gegeven dat u tussen 12.00 uur en 13.00 uur door 6 insecten wordt geplaagd, wat is de kans dat u tussen 12.00 uur en 12.15 uur ongestoord kunt eten?
 - e. Laat $(N_1(t), t \geq 0)$ en $(N_2(t), t \geq 0)$ onafhankelijke Poissonprocessen zijn met intensiteiten respectievelijk λ_1 en λ_2 , en laat $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$. Toon aan dat $(N(t), t \geq 0)$ eveneens een Poissonproces is.
2. Twee gokkers, A en B , spelen elke dag een bepaald spel. Hierbij zetten ze allebei een gulden in, waarna de gezamenlijke inzet (twee gulden) door speler A wordt gewonnen met kans $1/3$ en door speler B met kans $2/3$. Wanneer het kapitaal van een van beide spelers tot 0 is gereduceerd, wordt het spel in de volgende dagen niet meer gespeeld. Vóór het eerste spel wordt gespeeld, hebben beide spelers een beginkapitaal van 3 gulden.
Zij X_n het kapitaal van speler A na n dagen. Dan is $(X_n, n = 0, 1, \dots)$ een Markov-keten.
 - a. Geef de toestandruimte van deze keten.
 - b. Bepaal de overgangsmatrix van deze keten.
 - c. Bepaal de communicerende klassen van deze keten, geef hun periode, en ga voor elk van de klassen na of ze transient of recurrent zijn.
 - d. Bepaal de verwachte tijd tot het moment waarop het spel eindigt.

Z.O.Z.

Neem nu aan dat wanneer een der spelers een kapitaal van 0 gulden bereikt, deze onmiddellijk hierna een gulden kado krijgt van zijn tegenspeler. De volgende dag vervolgen ze hun spel als tevoren. Zij Y_n het kapitaal van speler A na n dagen in deze nieuwe situatie. Ook $(Y_n, n = 0, 1, \dots)$ is een Markov-keten, en wel met toestandsruimte $\{1, 2, \dots, 5\}$.

- e. Beantwoord opgave b. en c. voor de keten (Y_n) .
 - f. Welke fractie van de tijd (op de lange termijn) bezit speler A tenminste 3 gulden?
3. In een kleine autowerkplaats wordt zonder afspraken gewerkt. Klanten komen aan volgens een Poissonproces met intensiteit 2 per uur. De reparatietijden zijn exponentieel verdeeld met een verwachtingswaarde van een half uur. In de zaak werken 2 monteurs, maar aan elke auto werkt slechts één monteur tegelijk. Er is plaats voor maximaal 3 auto's, inclusief de auto's die in bediening zijn. Klanten die aankomen bij een volle werkplaats gaan meteen weer weg om hun auto elders te laten repareren.
- a. Definieer een geschikte Markovketen die dit systeem beschrijft en bepaal de generator matrix van deze keten.
 - b. Bepaal de lange-termijn kans dat de werkplaats leeg is.
 - c. Welke fractie van de aankomende klanten wordt op de lange duur niet geholpen?
 - d. Hoe lang duurt gemiddeld een periode waarin gewerkt wordt door minstens één van de monteurs?
 - e. Met welke factor neemt de omzet toe wanneer de monteurs 2x zo hard gaan werken? (De reparatietijden zijn dan exponentieel verdeeld met een verwachtingswaarde van een kwartier).

Neem vanaf nu aan dat er genoeg ruimte is voor aankomende klanten om op hun beurt te wachten, zodat uiteindelijk iedereen wordt geholpen. De overige gegevens blijven gelijk (de reparatietijden hebben weer een verwachtingswaarde van een half uur).

- f. Geef voor de stationaire situatie zowel het gemiddelde aantal klanten dat staat te wachten, als het gemiddeld aantal klanten dat in bediening is.

Normering:

1					2						3						Totaal
a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	f	a	b	c	d	e	f	
2	2	2	2	2	1	1	2	3	2	3	2	3	2	2	3	2	+ 4 = 40