

Datum: 24 juni 2009

Tentamen Markovketens (153065)
Vrijdag 26 juni 2009, 9.00 - 12.00 uur

Dit tentamen bevat 4 opgaven
Gebruik van het boek is niet toegestaan
Vermeld ook uw studentnummer op werk en tentamenbriefje
Motiveer uw antwoorden

1. Een lopende band ondervindt twee soorten storingen, type A en B. Beide typen treden volgens onafhankelijke Poissonprocessen met respectievelijke intensiteiten α en β per uur.
 - a. Geef een uitdrukking voor de kans dat er in een werkdag van 8 uur precies 15 storingen *van type A* optreden.
 - b. Geef een eenvoudige uitdrukking voor de kans dat er in een werkdag van 8 uur precies 15 storingen *in totaal* optreden.
 - c. Geef een uitdrukking voor de verdelingsfunctie van de tijd die verstrijkt tussen het optreden van een storing van type A en de eerstvolgende storing van type B.
 - d. Gegeven dat er vijf storingen van type A op een dag optreden tussen 9 uur 's morgens en 5 uur 's middags, wat is de kans dat hiervan precies twee storingen vóór het middaguur optreden?
 - e. Gegeven dat er twee storingen in het interval $(0, t]$ optraden, wat is de kans dat deze beide van type A waren?
2. Bij een 'bed-and-breakfast' gelegenheid met twee kamers kosten de kamers € 30 per nacht. Iedere dag komen er i vragen om een kamer binnen met kans p_i , $i = 0, 1, 2, \dots$. Hierbij is gegeven dat $p_0 = p_1 = 1/3$. Iedere aanvraag wordt geaccepteerd als er nog één of meer kamers vrij zijn. Verder besluit elke klant met kans $1/2$ na iedere overnachting om nog een nacht te blijven, onafhankelijk van verdere omstandigheden. De kamer blijft dan dus bezet. Zij X_n het aantal kamers dat in gebruik is op dag n .
 - a. Leg uit waarom $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ een Markov keten is.
 - b. Bepaal de overgangsmatrix P .
 - c. Als vandaag precies één kamer bezet is, wat is dan de kans dat de komende twee dagen er minstens één kamer bezet is?
 - d. Geef de verwachte opbrengst op een dag, als alle kamers de dag tevoren leeg waren.
 - e. Wat is op de lange duur de verwachte opbrengst per dag?

3. Beschouw een discrete tijd Markovketen $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$.
- Toon aan dat toestand i recurrent is als $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^n = \infty$.
 - Kan er een stationaire verdeling bestaan als $\{X_n\}$ irreducibel, positief-recurrent, en *periodiek* is? Motiveer uw antwoord.
4. Bij een systeem dat bestaat uit drie identieke machines en een (oneindig grote) wachtruimte komen produkten aan volgens een Poisson proces met intensiteit $3/4$ per uur. Als een produkt bij aankomst een vrije machine aantreft, ondergaat het daarop een bewerking die een exponentieel verdeelde tijd vergt met verwachtingswaarde 2 uur. Als er geen machines vrij zijn als een produkt aankomt, wacht dit produkt in de wachtruimte op zijn beurt. Na bewerking verlaten de produkten het systeem. Zij $X(t)$ het aantal produkten in het systeem op tijdstip t , dan is $\{X(t), t \geq 0\}$ een Markov keten.
- Geef de overgangsintensiteiten q_{ij} van de keten. Is de keten een geboorte-sterfte proces?
 - Bepaal de limietverdeling van de keten.
 - Bepaal de verwachte lengte van een periode gedurende welke het systeem precies twee produkten bevat.
 - Bepaal de verwachte tijd tot het systeem voor het eerst precies twee produkten bevat, als het systeem op het huidige tijdstip leeg is.
 - Bepaal de verwachte verblijftijd van een produkt in het systeem.
 - Geef aan hoe het antwoord op opgave a. verandert, en waarom, als na elke bewerking het betreffende produkt met kans $1/10$ de bewerking opnieuw moet ondergaan (waarbij het achteraan de wachtrij moet aansluiten als alle machines bezet zijn).

Normering:

1					2					3		4						totaal
a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	a	b	c	d	e	f	
1	1	2	2	2	1	3	2	2	3	2	2	3	3	1	2	2	2	+ 4 = 40