

Afdeling der Toegepaste Wiskunde

Kenmerk : NWM/toets/BJG/T1-070512

Datum : 28 november 2007

Numerieke Wiskunde en Modelleren (154027)

deeltoets 1, 5 december 2007, 9.00 – 10.30 uur.

Vermeld a.u.b. uw studentnummer op het tentamenbriefje.

Motiveer al uw antwoorden.

1. Gegeven is dat de functie f voldoende vaak differentieerbaar is. Met Taylorontwikkeling volgt voor de numerieke tweede afgeleide ($h > 0$):

$$D_2(h) = \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} = f^{(2)}(x_0) + Ch^2 + O(h^4).$$

- (a) Bepaal de uitdrukking voor C .
- (b) Wordt de fout in de tweede afgeleide gedomineerd door afbreekfouten of door afrondfouten? Onderscheid in uw antwoord situaties waarin $h \approx \epsilon_C$ en situaties waaring $h/\epsilon_C \gg 1$.
2. (a) Wat is de uitdrukking voor het conditiegetal van het probleem: "bereken de waarde van de functie f in een bepaald punt x "?
- Bereken dit conditiegetal indien f gegeven wordt door

$$f(x) = \tan x \left(\equiv \frac{\sin x}{\cos x} \right)$$

- (b) Stel dat we de waarde van $x = 0.68$ verkregen hebben uit een meting, maar dat er mogelijk een absolute fout van 0.01 op zit. Nu willen we $f(x)$ bepalen.
- (b1) Hoe groot is in dit geval het conditiegetal?
- (b2) Wat kun je uit (b1) concluderen omtrent de relatieve fout die mogelijk gemaakt wordt in het berekenen van $f(x)$ bij dit meetpunt?
3. Met behulp van de trapeziumregel voor het integreren van de functie

$$f(x) = 2e^{-x-x^2} + (3e^{-2} - 1)x^2$$

op het interval $[0, 1]$, d.w.z.,

$$I = \int_0^1 f(x) dx,$$

vinden we numerieke waarden $I(h)$ bij stapgrootte h als in de volgende tabel:

h	numerieke waarde $I(h)$
0.5000	0.817286388000510
0.2500	0.816212596855330
0.1250	0.816148425997833
0.0625	0.816144458517675

- (a) Bepaal uit de gegevens de orde van dit numerieke proces, m.a.w. bepaal de waarde van p in de relatie

$$I(h) = I + a_p h^p + O(h^{p+1}).$$

- (b) Bepaal door één keer te extrapoleren een verbeterde benadering van I , inclusief foutschatting.
- (c) Probeer de waarde van p , gevonden in (a) te verklaren met behulp van de volgende stelling.

Stelling: Stel f voldoende glad. Dan geldt voor de trapeziumregel verkregen benadering $I(h)$:

$$I(h) = \int_0^1 f(x)dx + a_2 h^2 + a_4 h^4 + \dots + a_{2m} h^{2m} + O(h^{2m+2}),$$

met

$$a_{2k} = \frac{b_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0))$$

en zekere (bekende) getallen b_{2k} .

De waarden van de opgaven: opg. 1: 1/4 punt, opg. 2: 1/2 punt, opg. 3: 3/4 punt, dus in totaal 1 1/2 punt. Deze deelttoets is met goed gevolg afgerond als tenminste 3/4 punt is behaald.