

Afdeling der Toegepaste Wiskunde

Kenmerk : NWM/toets/BJG/T2-080123
Datum : 15 januari 2008

Toets Numerieke Wiskunde en Modelleren (154027) deeltoets 2 , 23 januari 2008 , 13.30 – 15.00 uur.

Vermeld a.u.b. uw studentnummer op het tentamenbriefje.
Motiveer al uw antwoorden.

1. We beschouwen de volgende functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = e^{-x} - \sin(x) \quad (1)$$

- a) Maak een schets van de functie op het interval $[0, \pi]$.
- b) Beargumenteer dat de functie f tenminste twee nulpunten heeft op het interval $[0, \pi]$. Noem deze nulpunten α en β met $0 < \alpha < \beta < \pi$.

Voor de functie f in (1) bepalen we één nulpunt met een iteratieve methode.

- c) Geef een begin-interval $[a, b]$ aan waarmee de bisectiemethode naar het nulpunt α zal convergeren. Doe dit ook voor het nulpunt β .
- d) Een efficiënte methode om nulpunten te vinden is de methode van Newton.
 - i) Formuleer de methode van Newton voor de functie f .
 - ii) Uitgaande van $x = 0$ als startwaarde, wat levert de methode van Newton op na één stap voor de functie f in vergelijking (1)?

2. We bekijken het volgende probleem: bepaal $y(1)$ als de functie y voldoet aan

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{met} \quad f(x, y) = -2y \quad ; \quad y(0) = 3 \quad (2)$$

Een methode om (2) numeriek mee op te lossen is de volgende tweetraps Runge-Kutta methode. Als we y_n schrijven voor de numerieke benadering op $x_n = nh$, met h de stapgrootte, dan ziet deze methode er als volgt uit:

$$\tilde{y}_{n+1/2} = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = y_n + h f(x_n + \frac{h}{2}, \tilde{y}_{n+1/2}).$$

- (a) Is deze methode een expliciete of een impliciete methode?
- (b) Bereken y_1 en y_2 in detail.
- (c) Als gegeven is dat de *lokale* afbreekfout van de methode van orde 3 is wat kunt u dan concluderen voor de *globale* afbreekfout?
- (d) Hoe zou uw numerieke experiment eruit zien waarmee u de lokale en de globale afbreekfout van deze Runge-Kutta methode zou bepalen. Welke stappen zou u nemen en hoe zou u de theoretische voorspellingen voor deze fouten verifiëren?

NB: De waarde van de deelopgaven zijn: $3/4$ en $3/4$. In totaal $1 \frac{1}{2}$ punt. Deze deeltoets is met goed gevolg afgerond als tenminste $3/4$ punt is behaald.