

Afdeling der Toegepaste Wiskunde

Kenmerk : NWM/toets/BJG/T1-080312
Datum : 26 november 2008

Numerieke Wiskunde en Modelleren (154027) deeltoets 1 , 3 december 2008 , 08:30 – 10.00 uur.

Vermeld a.u.b. uw studentnummer op het tentamenbriefje.
Motiveer al uw antwoorden.

1. Gegeven is het probleem

$$P: \text{ bereken } f(x) = \frac{1}{x^2} - x, \quad 0 < x < 1. \quad \begin{array}{l} x^{-2} - x \\ f' = -2x^{-3} - 1 \end{array}$$

Het conditiegetal van dit probleem is $c_P(x)$.

- (a) Bepaal het conditiegetal $c_P(x)$ en bereken de waarde in $x = 0.5$.
 - (b) We bepalen x via een meting en vinden $x = 0.5$ met absolute meetfout 0.01. Hoe groot is de relatieve fout in de uitkomst $f(x)$?
 - (c) Welk verschijnsel treedt op bij de berekening van $f(x)$ voor $x \approx 1$ ($x < 1$)?
2. We beschouwen het randwaardeprobleem:

$$y''(x) = x^2 y(x), \quad (1)$$

met randcondities

$$y(1) = 1, \quad y(3) = 0. \quad (2)$$

We kiezen een uniform rooster op het interval $[1, 3]$ bestaande uit $n + 1$ punten, met onderlinge afstand h . De roosterpunten noemen we $x_k, k = 0, \dots, n$, met $x_0 = 1, x_n = 3$. De bijbehorende $n + 1$ waarden y_k zijn benaderingen van $y(x_k)$.

- (a) Laat zien dat de centrale differentie

$$\delta_2(y)_k = \frac{1}{h^2} (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})$$

de tweede afgeleide $y''(x_k)$ in het punt x_k met tweede orde nauwkeurigheid benadert.

- (b) Bepaal de differentievergelijkingen die de vergelijking (1) in x_1 en x_{n-1} benaderen. Formuleer uw antwoord in termen van $\{y_k\}$ en gebruik de randcondities in (2).
- (c) Beschrijf het lineaire stelsel vergelijkingen dat moet worden opgelost om de waarden $\{y_k\}$ te verkrijgen.

3. Een numeriek integratieproces levert voor een zekere integraal I de volgende benaderingen $I(h)$ bij diverse stapgroottes h :

h	$I(h)$
1/2	3.26914555200204
1/4	3.26485038742132
1/8	3.26459370399133
1/16	3.26457783407070

- (a) Bepaal de (geheeltallige) orde p van dit proces op grond van de waarden in de tabel, m.a.w. bepaal de waarde van p in de uitdrukking $I(h) = I + ch^p + O(h^{p+1})$, $p \in \mathbb{N}$.
- (b) Voer één Richardson extrapolatie uit om een betere benadering voor I te bepalen, inclusief foutschatting.

De waarden van de opgaven: opg. 1: 1/2 punt, opg. 2: 1/2 punt, opg. 3: 1/2 punt, dus in totaal 1 1/2 punt. Deze deoltoets is met goed gevolg afgerond als tenminste 3/4 punt is behaald.