

Afdeling der Toegepaste Wiskunde

Kenmerk : NWM/toets/BJG/T2-090121
Datum : 4 januari 2009

Toets Numerieke Wiskunde en Modelleren (154027) deeltoets 2 , 21 januari 2009 , 08.30 – 10.00 uur.

Vermeld a.u.b. uw studentnummer op het tentamenbriefje.
Motiveer al uw antwoorden.

1. We beschouwen de volgende functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \cos(x) + e^{-x} \quad (1)$$

- a) Bewijs dat de functie f tenminste één nulpunt heeft op het interval $[0, \pi]$.

Omdat we voor de functie f in (1) geen exacte nulpunten kunnen bepalen, bepalen we één zo'n nulpunt met een numerieke methode, en wel met behulp van een iteratieprocedure.

- b) i) Welke numerieke methode kiest u om gegarandeerd één nulpunt op het interval $[0, \pi]$ te vinden?
ii) Hoeveel stappen zijn ongeveer nodig om met deze methode een nulpunt met een nauwkeurigheid van 10^{-4} te bepalen?
- c) Een efficiënte methode om nulpunten te vinden is de methode van Newton.
- i) Uitgaande van $x = 0$ als startwaarde, wat levert de methode van Newton op na één stap voor de functie f in (1)?
- ii) Hoeveel stappen zijn ongeveer nodig om met deze methode een nulpunt met een nauwkeurigheid van 10^{-4} te bepalen?

2. Er bestaan veel manieren om een gewone differentiaalvergelijking van de vorm

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(0) = y_0,$$

numeriek op te lossen. Hierin is f een gegeven functie, en y_0 een gegeven getal.

Eén zo'n numerieke methode is de zogenaamde midpuntregel. Als we y_n schrijven voor de numerieke benadering op $t_n = nh$, met h de stapgrootte, ziet deze methode er als volgt uit:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1/2}, \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1})).$$

- (a) Is deze methode een expliciete of impliciete methode?
- (b) Laat zien dat de *lokale* afbreekfout van de methode van orde 3 is, in het geval dat we ons probleem oplossen voor het geval dat $f(t, y) = -2y$.
- (c) In het algemeen kan worden bewezen dat de methode een lokale afbreekfout van orde 3 heeft. Wat kunt u daaruit concluderen voor de *globale* afbreekfout?

- (d) Stel we hebben een implementatie van de midpuntregel geschreven voor willekeurig rechterlid $f(t, y)$ en we willen die testen. Beschrijf in detail welke numerieke experimenten u in die test wilt opnemen en hoe u de resultaten analyseert.

NB: De waarde van de deelopgaven zijn: $3/4$ en $3/4$. In totaal $1\frac{1}{2}$ punt. Deze deoltoets is met goed gevolg afgerond als tenminste $3/4$ punt is behaald.