Afdeling der Toegepaste Wiskunde

Kenmerk : NWM/toets/BJG/T1-101201
Datum : 27 november 2010

Numerieke Wiskunde en Modelleren (19154027)

deeltoets 1 , 1 december 2010 , 08:45 – 10;15 uur.

Vermeld a.u.b. uw studentnummer op het tentamenbriefje. Motiveer al uw antwoorden.

1. We willen $f(x) = x^2 - 1$ berekenen.

   (a) Geef de definitie van het conditiegetal van het probleem: "bereken f in x".

   (b) Geef een uitdrukking voor dit conditiegetal.

   (c) Stel dat we de waarde $x = 0.95$ verkregen hebben uit een meting, maar dat er mogelijk een absolute fout van 0.01 op zit. Nu willen we $f(x)$ bepalen.

   (c1) Hoe groot is in dit geval het conditiegetal?

   (c2) Wat kunt u uit (c1) concluderen omtrent de relatieve fout die mogelijk gemaakt wordt in het berekenen van $f(x)$ bij dit meetpunt?

   (d) We kunnen f op twee manieren berekenen

   $$f_1(x) = (x \cdot x) - 1 \quad ; \quad f_2(x) = (x+1)\cdot(x-1)$$

   Stel x is een machinegetal en we voeren deze algoritmen uit op een machine met relatieve afrondfoutgrens ϵ_C. Bereken een eerste orde benadering in ϵ_C voor de absolute afrondfout

   $$|C[f_i(x)] - f(x)| \quad ; \quad i = 1,2$$

   Welk algoritme heeft uw voorkeur indien $x \approx 1$?

2. Met behulp van een numeriek integratieproces vinden we voor een zekere integraal I de volgende benaderingen $I(h)$ bij diverse stapgroottes h:

h	$I(h)$
1/2	3.26914555200204
1/4	3.26485038742132
1/8	3.26459370399133
1/16	3.26457783407070

   (a) Bepaal de (geheeltallige) orde p van dit proces op grond van de waarden in de tabel, m.a.w. bepaal de waarde van p in de uitdrukking $I(h) = I + c\,h^p + O(h^{p+1})$, $p \in N$.

   (b) Voer één extrapolatie uit om een betere benadering voor I te bepalen, inclusief foutschatting.

3. We beschouwen het randwaardeprobleem:

$$y''(x) = x^2\, y(x) + \sin(x), \tag{1}$$

met randcondities

$$y(1) = 1, \;\; y(3) = 0. \tag{2}$$

We kiezen een uniform rooster op het interval $[1,3]$ bestaande uit $n+1$ punten, met onderlinge afstand h. De roosterpunten noemen we $x_k, k = 0, \ldots, n$, met $x_0 = 1, x_n = 3$. De bijbehorende $n+1$ waarden y_k zijn benaderingen van $y(x_k)$.

De tweede orde afgeleide wordt benaderd met

$$y''(x_k) \approx \frac{1}{h^2}\left(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}\right)$$

(a) Bepaal de differentievergelijkingen die de vergelijking (1) in x_1 en x_{n-1} benaderen. Formuleer uw antwoord in termen van $\{y_k\}$ en gebruik de randcondities in (2).

(b) Beschrijf het lineaire stelsel vergelijkingen dat moet worden opgelost om de waarden $\{y_k\}$ te verkrijgen.

De waarden van de opgaven: opg. 1: 2/3 punt, opg. 2: 1/2 punt, opg. 3: 1/3 punt, dus in totaal 1 1/2 punt. Deze deeltoets is met goed gevolg afgerond als tenminste 3/4 punt is behaald.