UNIVERSITEIT TWENTE
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Uitwerking proeftentamen 3 Signalen en Transformaties (201100109).

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!

1.

Zij $f(t)$ de $\frac{\pi}{2}$-periodieke functie die voor $t \in [0, \frac{\pi}{2})$ wordt gegeven door

$$f(t) = \sin t$$

a) Toon aan dat de complexe Fouriercoëfficiënten van $f(t)$ gelijk zijn aan:

$$f_k = \frac{8ki - 2}{(16k^2 - 1)\pi}$$

Omdat $T = \frac{\pi}{2}$ hebben we $\omega_0 = 4$. We krijgen:

$$\begin{aligned}
f_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(t) e^{-i4kt} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi i} \int_0^{\pi/2} \left(e^{i(1-4k)t} - e^{-i(1+4k)t} \right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi i} \left[\frac{1}{i(1-4k)} e^{i(1-4k)t} + \frac{1}{i(1+4k)} e^{-i(1+4k)t} \right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{-1}{\pi} \left[\frac{i-1}{1-4k} - \frac{i+1}{1+4k} \right] \\
&= \frac{1}{\pi(16k^2 - 1)} [\, (1+4k)(i-1) - (1-4k)(i+1) \,] \\
&= \frac{1}{\pi(16k^2 - 1)} [\, -2 + 8ki \,]
\end{aligned}$$

en dat is gelijk aan de gegeven uitkomst.

b) Bepaal de reële Fourierreeks van $f(t)$.

We weten dat de reële Fourierreeks van $f(t)$ wordt gegeven door:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t).$$

We hebben $\omega_0 = 4$. Daarnaast geldt $2f_k = a_k - ib_k$ en dus

$$a_k = \frac{4}{(1 - 16k^2)\pi}, \quad b_k = \frac{16k}{(1 - 16k^2)\pi}.$$

Hieruit volgt dat de reële Fourierreeks gelijk is aan:

$$\frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(1 - 16k^2)\pi} \cos(4kt) + \frac{16k}{(1 - 16k^2)\pi} \sin(4kt).$$

c) Is f gelijk aan de reële Fourierreeks voor alle $t \in \mathbb{R}$?

We weten dat de reële Fourierreeks van $f(t)$ gelijk is aan

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2}$$

Dit is natuurlijk gelijk aan $f(t)$ voor alle $t \in \mathbb{R}$ waar de functie continu is. Maar in het punt 0 is de functie niet continu:

$$f(0-) = \lim_{t \uparrow 0} f(t) = \lim_{t \uparrow \frac{\pi}{2}} f(t) = 1, \quad f(0+) = \lim_{t \downarrow 0} f(t) = 0.$$

Dus de reële Fourierreeks voor $t = 0$ is gelijk aan $1/2$ en niet gelijk aan $f(0) = 0$.

d) Bereken de gegeneraliseerde afgeleide $f'(t)$ van $f(t)$.

Voor $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ hebben we:

$$f(t) = \sin t$$

en dus:

$$f'(t) = \cos t$$

maar zoals we al zagen heeft de functie in 0 een sprong omlaag van 1 naar 0 en dus komt er ook nog een δ-functie in de afgeleide. Dus voor $t \in (0-, \frac{\pi}{2})$ hebben we:

$$f'(t) = \sin t - \delta(t)$$

en dit moet $\frac{\pi}{2}$-periodiek wordt voortgezet. In het bijzonder heeft de afgeleide dus een δ-puls in $-\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi$, etc.

e) Bepaal het vermogen van f.

Dit kan het makkelijkste in het tijddomein:

$$P_f = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$

dus

$$\begin{aligned} P_f &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t) \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi} \left[t - \tfrac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2.

Voor een filter wordt de impulsresponsie $h(t)$ gegeven door

$$h(t) = \frac{t+1}{t^2 + 2t + 10}$$

a) Laat zien dat de frequentieresponsie $\hat{h}(\omega)$ van het systeem gegeven wordt door

$$-i\pi \operatorname{sgn}(\omega) e^{i\omega - 3|\omega|}$$

We hebben

$$\begin{aligned}
e^{-3|t|} &\longleftrightarrow \frac{6}{\omega^2+9}\\
\frac{6}{t^2+9} &\longleftrightarrow 2\pi e^{-3|\omega|}\\
\frac{1}{t^2+9} &\longleftrightarrow \frac{\pi}{3}e^{-3|\omega|}\\
\frac{-it}{t^2+9} &\longleftrightarrow -\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)e^{-3|\omega|}\\
\frac{t}{t^2+9} &\longleftrightarrow -\pi i\,\mathrm{sgn}(\omega)e^{-3|\omega|}\\
\frac{t+1}{(t+1)^2+9} &\longleftrightarrow -\pi i\,\mathrm{sgn}(\omega)e^{i\omega-3|\omega|}
\end{aligned}$$

Dit levert dus de frequentieresponsie op zoals gegeven in de opgave. Hierbij hebben we de reciprociteitsregel, de regel voor differentiatie in het frequentiedomein en de verschuivingsregel gebruikt

Aan het systeem wordt een ingangssignaal

$$u(t) = -\cos(t) + \sin(2t)$$

toegevoerd. Zij $y(t)$ de responsie van het systeem op het gegeven ingangssignaal $u(t)$.

b) Bereken de responsie $y(t)$ en toon aan dat $y(t)$ een reëel signaal is.

$u(t)$ is een periodiek signaal. Als $u(t)$ een periodiek signaal is met Fourierreeks:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k e^{ik\omega_0 t}$$

dan hebben we:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{h}(k\omega_0)u_k e^{ik\omega_0 t}$$

In ons geval,

$$u(t) = -\tfrac{1}{2}\left(e^{it}+e^{-it}\right) + \tfrac{1}{2i}\left(e^{2it}-e^{-2it}\right)$$

en dus:

$$y(t) = -\tfrac{1}{2}\left(\hat{h}(1)e^{it}+\hat{h}(-1)e^{-it}\right) + \tfrac{1}{2i}\left(\hat{h}(2)e^{2it}-\hat{h}(-2)e^{-2it}\right)$$

We hebben:

$$\begin{aligned}
\hat{h}(1) &= -i\pi e^{-3+i} & \hat{h}(-1) &= i\pi e^{-3-i}\\
\hat{h}(2) &= -i\pi e^{-6+2i} & \hat{h}(-2) &= i\pi e^{-6-2i}
\end{aligned}$$

Hiermee vinden we:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \tfrac{i\pi}{2}\left(e^{-3+i}e^{it}-e^{-3-i}e^{-it}\right) - \tfrac{i\pi}{2i}\left(e^{-6+2i}e^{2it}+e^{-6-2i}e^{-2it}\right)\\
&= -\pi e^{-3}\sin(t+1) - \pi e^{-6}\cos(2t+2)
\end{aligned}$$

en dit is duidelijk een reëel signaal.

3.

Bepaal de convolutie van $f(t) = \mathbb{1}(t-1)$ en $g(t) = \cos(t)\,\mathbb{1}(t-\pi)$ op twee verschillende manieren.

Omdat alle signalen causaal en begrensd zijn kunnen we zowel Laplacetransformatie als Fouriertransformatie gebruiken. Wij kiezen hier voor de Laplacetransformatie.

We hebben:

$$\begin{aligned} \mathbb{1}(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{s} \\ \mathbb{1}(t-1) &\longleftrightarrow e^{-s}\frac{1}{s} \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \cos(t)\,\mathbb{1}(t) &\longleftrightarrow \frac{s}{s^2+1} \\ \cos(t-\pi)\,\mathbb{1}(t-\pi) &\longleftrightarrow e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1} \\ \cos(t)\,\mathbb{1}(t-\pi) &\longleftrightarrow -e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1} \end{aligned}$$

waarbij we gebruik maken van de tabel en de regel voor verschuiving. De Laplacegetransformeerde van $f(t)$ is dus gelijk aan:

$$F(s)) = e^{-s}\frac{1}{s}$$

en de Laplacegetransformeerde van $g(t)$ is dus gelijk aan:

$$G(s) = -e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}$$

Als we dit combineren zien we dat de Laplacegetransformeerde van $(f \star g)(t)$ gelijk is aan:

$$F(s)G(s) = -e^{-(\pi+1)s}\frac{1}{s^2+1}$$

We hebben

$$\begin{aligned} \sin(t)\,\mathbb{1}(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{s^2+1} \\ -\sin(t-\pi-1)\,\mathbb{1}(t-\pi-1) &\longleftrightarrow -e^{-(\pi+1)s}\frac{1}{s^2+1} \\ \sin(t-1)\,\mathbb{1}(t-\pi-1) &\longleftrightarrow -e^{-(\pi+1)s}\frac{1}{s^2+1} \end{aligned}$$

De convolutie is dus gelijk aan:

$$(f \star g)(t) = \sin(t-1)\,\mathbb{1}(t-\pi-1)$$

We kunnen dit ook rechtstreeks via de definitie berekenen:

$$\begin{aligned} (f \star g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\tau)\,\mathbb{1}(\tau-\pi)\,\mathbb{1}(t-\tau-1)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{\pi}^{\infty} \cos(\tau)\,\mathbb{1}(t-\tau-1)\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

Voor $t > \pi + 1$ hebben we:

$$\begin{aligned}(f \star g)(t) &= \int_{\pi}^{t-1} \cos(\tau)\, \mathrm{d}\tau \\ &= \sin(t-1)\end{aligned}$$

Aan de andere kant als $t < \pi + 1$ hebben we voor $\tau > \pi$ dat $t - \tau - 1 < 0$ en dus krijgen we:

$$(f \star g)(t) = \int_{\pi}^{\infty} \cos(\tau)\, \mathbb{1}(t - \tau - 1)\, \mathrm{d}\tau = 0$$

Als we deze twee gevallen samenvoegen krijgen we:

$$(f \star g)(t) = \sin(t-1)\, \mathbb{1}(t - \pi - 1)$$

Dat laatste laat zien dat er hetzelfde uit komt als via de Laplacetransformatie.

4.

We bekijken de ruimte van reëelwaardige functies $\mathcal{L}_2(-\pi, \pi)$ met de volgende complete orthonormale basis:

$$\begin{aligned} e_1(t) &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ e_{2k}(t) &= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kt) \\ e_{2k+1}(t) &= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kt) \end{aligned}$$

voor $k = 1, 2, \ldots$ ten opzichte van het inproduct

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x(t) y(t)\, \mathrm{d}t$$

a) Gegeven is de deelruimte $\mathcal{L}_2^{\text{even}}(-\pi, \pi)$ van even functies, d.w.z. functies met de eigenschap dat $f(t) = f(-t)$ voor alle t. Bepaal een complete orthonormale basis voor $\mathcal{L}_2^{\text{even}}(-\pi, \pi)$.

We hebben voor een even functie:

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, e_j \rangle\, e_j$$

Voor een even functie hebben we:

$$\begin{aligned}\langle f, e_{2k} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)\, \mathrm{d}t &= \int_{-\pi}^{\pi} f(-t) \sin(-kt)\, \mathrm{d}t \\ &= -\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)\, \mathrm{d}t = -\langle f, e_{2k} \rangle\end{aligned}$$

waarbij we eerst via een substitutie t vervangen door $-t$ en dan in de volgende stap gebruiken dat $f(-t) = f(t)$ en $\sin(-kt) = -\sin(kt)$. Uit deze afleiding volgt dat:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_{2k+1} \rangle\, e_{2k+1}$$

Dus elke even functie kan worden geschreven in termen van de functies e_{2k+1} met $k = 0, 1, 2, \ldots$. Deze functies zijn zelf even en bovendien orthonormaal (een deelverzameling van een orthonormale basis is zelf natuurlijk ook orthonormaal). Omdat elke even functie geschreven kan worden in termen van deze orthonormale basis weten we direct dat dit een complete orthonormale basis is.

b) Vindt de beste benadering voor

$$f(t) = \sin(t) - 2\cos(t)$$

in de ruimte $\mathcal{L}_2^{\text{even}}(-\pi, \pi)$.

Een antwoord alleen is niet voldoende; je moet aantonen dat je de beste benadering hebt gevonden.

We weten dat voor een beste approximatie f^* moet gelden dat

$$f - f^* \perp \mathcal{L}_2^{\text{even}}(-\pi, \pi) \qquad (*)$$

Dit betekent dat:

$$\langle f - f^*, e_{2k+1} \rangle = 0$$

voor $k = 0, 1, 2, \ldots$. We weten ook dat $f^* \in \mathcal{L}_2^{\text{even}}(-\pi, \pi)$ en dus:

$$f^* = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f^*, e_{2k+1} \rangle\, e_{2k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_{2k+1} \rangle\, e_{2k+1} \qquad (**)$$

waarbij we gebruik maken van $(*)$. Omdat:

$$f = \sqrt{\pi} e_2 - 2\sqrt{\pi} e_3$$

en dus

$$\langle f, e_{2k+1} \rangle = 0$$

voor $k \neq 1$ en voor $k = 1$ krijgen we:

$$\langle f, e_3 \rangle = -2\sqrt{\pi}$$

maar dan volgt uit $(**)$ dat:

$$f^*(t) = -2\sqrt{\pi} e_3(t) = -2\cos(t).$$

Een alternatieve aanpak is om te gokken dat $f^*(t) = -2\cos(t)$ en dan te verifiëren dat voldaan is aan

$$\langle f - f^*, e_{2k+1} \rangle = 0$$

voor $k = 0, 1, 2, \ldots$.

5.

Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$y^{(2)}(t) + y^{(1)}(t) - 2y(t) = u^{(1)}(t) + 3u(t). \tag{1}$$

a) Bepaal de impulsresponsie van (1).

We hebben omdat alle begincondities nul zijn

$$s^2Y(s) + sY(s) - 2Y(s) = sU(s) + 3U(s)$$

en dus:

$$Y(s) = \frac{s+3}{s^2+s-2}U(s) \tag{2}$$

We vinden de impulsresponsie door de inverse Laplace transformatie los te laten op de overdrachtsfunctie

$$H(s) = \frac{s+3}{s^2+s-2} = \frac{4}{3(s-1)} - \frac{1}{3(s+2)}$$

We krijgen dan dat de impulsresponsie gelijk is aan:

$$h(t) = \left(\tfrac{4}{3}e^t - \tfrac{1}{3}e^{-2t}\right)\mathbb{1}(t)$$

b) Bepaal de stapresponsie van (1).

We hebben voor $t > 0$:

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{0-}^{t} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{0-}^{t} \left(\tfrac{4}{3}e^{\tau} - \tfrac{1}{3}e^{-2\tau}\right)\mathrm{d}\tau \\ &= \tfrac{4}{3}e^t + \tfrac{1}{6}e^{-2t} - \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

We krijgen dus:

$$g(t) = \left[\tfrac{4}{3}e^t + \tfrac{1}{6}e^{-2t} - \tfrac{3}{2}\right]\mathbb{1}(t)$$

c) Als ingang kiezen we $u(t) = \cos(t)\,\mathbb{1}(t)$. Bepaal de oplossing voor $t > 0$ van (1) met $y(0^-) = 2$ en $y'(0^-) = 3$.

Als de begincondities niet nul zijn krijgen we:

$$\begin{aligned} y^{(1)}(t) &\longleftrightarrow sY(s) - y(0^-) = sY(s) - 2 \\ y^{(2)}(t) &\longleftrightarrow s(sY(s) - 2) - y'(0^-) = s^2Y(s) - 2s - 3 \end{aligned}$$

We hebben:

$$U(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

en

$$u^{(1)}(t) \longleftrightarrow sU(s) - u(0^-) = \frac{s^2}{s^2+1}.$$

We krijgen:

$$(s^2 + 2s + 2)Y(s) - 2s - 5 = \frac{s(s+3)}{s^2+1}$$

en dus

$$(s^2 + s - 2)Y(s) = 2s + 5 + \frac{s(s+3)}{s^2+1}$$

Dus:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{(2s+5)(s^2+1) + s(s+3)}{(s^2+1)(s^2+s-2)} \\ &= \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s-1} \end{aligned}$$

Om A, B, C, D te bepalen brengen we alles onder één noemer en we krijgen:

$$\begin{multline} (As+B)(s+2)(s-1) + C(s^2+1)(s-1) + D(s^2+1)(s+2) \\ = (2s+5)(s^2+1) + s(s+3) \end{multline}$$

en we vinden

$$A = -\tfrac{4}{5}, \quad B = \tfrac{3}{5}, \quad C = -\tfrac{1}{5}, \quad D = 3$$

en dat levert op::

$$y(t) = \left[-\tfrac{4}{5}\cos(t) + \tfrac{3}{5}\sin(t) - \tfrac{1}{5}e^{-2t} + 3e^{t} \right] \mathbb{1}(t).$$