UNIVERSITEIT TWENTE
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Uitwerking proeftentamen 1 Signalen en Transformaties (201100109).

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!

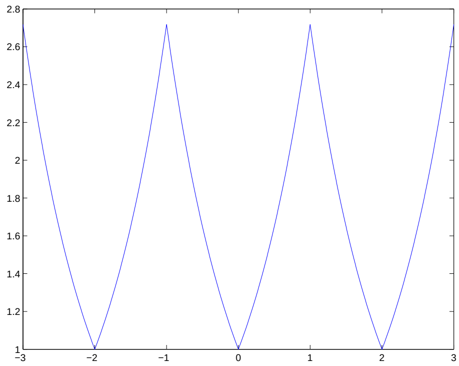
1.

Zij $f(t)$ de 2-periodieke functie die voor $t \in [-1, 1)$ wordt gegeven door

$$f(t) = e^{|t|}$$

a) Toon aan dat de functie $f(t)$ even is.

Uit de grafiek van de functie:



kunnen we al wel vermoeden dat de functie even is maar dat moeten we nog wel aantonen.

Voor $t \in [-1, 1]$ hebben we:

$$f(t) = e^{|t|} = e^{|-t|} = f(-t)$$

Voor $t \in \mathbb{R}$ bestaat er een geheel getal m zodanig dat $t - 2m \in [-1, 1]$. We vinden:

$$f(t) = f(t - 2m) = e^{|t-2m|} = e^{|-t+2m|} = f(-t + 2m) = f(-t)$$

waarbij we twee keer gebruik maken van het feit dat f een periodieke functie is met periode 2.

b) Toon aan dat de complexe Fourierreeks van $f(t)$ gegeven wordt door:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k e - 1}{\pi^2 k^2 + 1} e^{\pi i k t}$$

Omdat $T = 2$ hebben we $\omega_0 = \pi$. We krijgen:

$$\begin{aligned}
f_k &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{|t|}e^{-ik\pi t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} e^{-t}e^{-ik\pi t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} e^{t}e^{-ik\pi t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} e^{-(1+ik\pi)t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} e^{(1-ik\pi)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1+ik\pi}e^{-(1+ik\pi)t}\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-ik\pi}e^{(1-ik\pi)t}\right]_{0}^{1} \\
&= \frac{1}{2}\frac{-1}{1+ik\pi}\left[1-e^{1+ik\pi}\right] + \frac{1}{2}\frac{1}{1-ik\pi}\left[e^{1-ik\pi}-1\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{1+ik\pi}\left[e(e^{i\pi})^k-1\right] + \frac{1}{2}\frac{1}{1-ik\pi}\left[e(e^{-i\pi})^k-1\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+ik\pi}+\frac{1}{1-ik\pi}\right]\left[e(-1)^k-1\right] \\
&= \frac{e(-1)^k-1}{1+k^2\pi^2}
\end{aligned}$$

We weten dat de complexe Fourierreeks van $f(t)$ wordt gegeven door:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{\pi ikt}.$$

en met de berekende f_k krijgen we precies het gegeven antwoord.

c) Bepaal de reële Fourierreeks van $f(t)$.

We weten dat de reële Fourierreeks van $f(t)$ wordt gegeven door:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(k\omega_0 t) + b_k\sin(k\omega_0 t).$$

met $\omega_0 = \pi$ en $2f_k = a_k - ib_k$ waarbij we de f_k net hebben berekend in het vorige onderdeel. We krijgen:

$$a_k = 2\frac{e(-1)^k-1}{1+k^2\pi^2}, \qquad b_k = 0$$

en na invullen krijgen we:

$$e - 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e(-1)^k-1}{1+k^2\pi^2}\cos(k\pi t)$$

d) Bereken de gegeneraliseerde afgeleide $f'(t)$ van $f(t)$.

Voor $t \in (0,1)$ hebben we:

$$f(t) = e^t$$

en dus:

$$f'(t) = e^t$$

Voor $t \in (-1, 0)$ hebben we:

$$f(t) = e^{-t}$$

en dus:

$$f'(t) = -e^{-t}$$

In $t = -1$, $t = 0$ en $t = 1$ heeft de functie wel een knik maar geen sprong dus we krijgen geen δ pulsen. De afgeleide van $f(t)$ is dus een 2 periodieke functie die voor $t \in (-1, 1)$ gelijk is aan

$$f'(t) = \operatorname{sgn}(t) e^{|t|}$$

e) Bepaal het vermogen van f.

Dit kan het makkelijkste in het tijddomein:

$$P_f = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$

dus

$$\begin{aligned} P_f &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{2|t|} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} e^{-2t} \, \mathrm{d}t + \frac{1}{2} \int_{0}^{1} e^{2t} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4} \left[-e^{-2t} \right]_{-1}^{0} + \frac{1}{4} \left[e^{2t} \right]_{0}^{1} \\ &= \tfrac{1}{4}(e^2 - 1) + \tfrac{1}{4}(e^2 - 1) \\ &= \tfrac{1}{2}(e^2 - 1) \end{aligned}$$

2.

Voor een filter wordt de impulsresponsie $h(t)$ gegeven door

$$h(t) = \frac{\cos^2(t)}{(t + \frac{\pi}{2})^2}$$

a) Laat zien dat de frequentieresponsie $\hat{h}(\omega)$ van het systeem gegeven wordt door

$$\pi e^{i\omega\pi/2} \operatorname{trian}_2(\omega).$$

We hebben

$$\begin{aligned} \operatorname{trian}_2(t) &\longleftrightarrow \frac{2\sin^2\omega}{\omega^2} \\ \frac{2\sin^2 t}{t^2} &\longleftrightarrow 2\pi \operatorname{trian}_2(-\omega) \\ \frac{\sin^2 t}{t^2} &\longleftrightarrow \pi \operatorname{trian}_2(\omega) \end{aligned}$$

volgens de reciprociteitsregel en de tabel. Vervolgens passen we een tijdsverschuiving toe:

$$\frac{\sin^2(t+\frac{\pi}{2})}{(t+\frac{\pi}{2})^2} \longleftrightarrow \pi e^{i\omega\pi/2}\,\mathrm{trian}_2(\omega)$$
$$\frac{\cos^2(t)}{(t+\frac{\pi}{2})^2} \longleftrightarrow \pi e^{i\omega\pi/2}\,\mathrm{trian}_2(\omega)$$

waar we gebruiken dat:

$$\sin(t+\tfrac{\pi}{2}) = \cos(t)$$

Dit levert dus de frequentieresponsie op zoals gegeven in de opgave.

Aan het systeem wordt een ingangssignaal

$$u(t) = 1+\cos(t)-\sin(4t)$$

toegevoerd. Zij $y(t)$ de responsie van het systeem op het gegeven ingangssignaal $u(t)$.

b) Bereken de responsie $y(t)$ en toon aan dat $y(t)$ een reëel signaal is.

$u(t)$ is een periodiek signaal. Als $u(t)$ een periodiek signaal is met Fourierreeks:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k e^{ik\omega_0 t}$$

dan hebben we:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{h}(k\omega_0) u_k e^{ik\omega_0 t}$$

In ons geval,

$$u(t) = 1+\tfrac{1}{2}\left(e^{it}+e^{-it}\right)+\tfrac{1}{2i}\left(e^{4it}-e^{-4it}\right)$$

en dus:

$$y(t) = \hat{h}(0)+\tfrac{1}{2}\left(\hat{h}(1)e^{it}+\hat{h}(-1)e^{-it}\right)+\tfrac{1}{2i}\left(\hat{h}(4)e^{4it}-\hat{h}(-4)e^{-4it}\right)$$

We hebben:

$$\begin{aligned} &\hat{h}(4)=0 && \hat{h}(-4)=0\\ &\hat{h}(1)=\tfrac{\pi}{2}i && \hat{h}(-1)=-\tfrac{\pi}{2}i\\ &\hat{h}(0)=\pi \end{aligned}$$

Hiermee vinden we:

$$\begin{aligned} y(t) &= \pi+\tfrac{\pi i}{4}\left(e^{it}-e^{-it}\right)\\ &= \pi-\tfrac{\pi}{2}\sin(t) \end{aligned}$$

en dit is duidelijk een reëel signaal.

3.

Bepaal de convolutie van $f(t) = e^t\,\mathbb{1}(-t)$ en $g(t) = f(1-t)$ op twee verschillende manieren.

Omdat niet alle signalen causaal zijn, moeten we Fouriertransformatie gebruiken in plaats van Laplacetransformatie.

We hebben:

$$\begin{aligned} e^{-t}\,\mathbb{1}(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{1+i\omega} \\ e^{t}\,\mathbb{1}(-t) &\longleftrightarrow \frac{1}{1-i\omega} \end{aligned}$$

waarbij we gebruik maken van de tabel en de regel voor schaling. De Fouriergetransformeerde van $f(t)$ is dus gelijk aan:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{1-i\omega}$$

We hebben:

$$g(t) = f(1-t) = e^{1-t}\,\mathbb{1}(t-1)$$

en

$$\begin{aligned} e^{-t}\,\mathbb{1}(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{1+i\omega} \\ e^{-(t-1)}\,\mathbb{1}(t-1) &\longleftrightarrow e^{-i\omega}\frac{1}{1+i\omega} \end{aligned}$$

volgens de tabel en de regel voor tijdverschuiving. De Fouriergetransformeerde van $g(t)$ is dus gelijk aan:

$$\hat{g}(\omega) = e^{-i\omega}\frac{1}{1+i\omega}$$

Als we deze twee stappen combineren zien we dat de Fouriergetransformeerde van $(f \star g)(t)$ gelijk is aan:

$$\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) = e^{-i\omega}\frac{1}{1+i\omega}\frac{1}{1-i\omega} = e^{-i\omega}\frac{1}{1+\omega^2}$$

We hebben:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}e^{-|t|} &\longleftrightarrow \frac{1}{1+\omega^2} \\ \tfrac{1}{2}e^{-|t-1|} &\longleftrightarrow e^{-i\omega}\frac{1}{1+\omega^2} \end{aligned}$$

De convolutie is dus gelijk aan:

$$(f \star g)(t) = \tfrac{1}{2}e^{-|t-1|}$$

We kunnen dit ook rechtstreeks via de definitie berekenen:

$$\begin{aligned}(f \star g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\,\mathbb{1}(-\tau)e^{1-t+\tau}\,\mathbb{1}(t-\tau-1)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{1-t+2\tau}\,\mathbb{1}(t-\tau-1)\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

Voor $t-1<0$ krijgen we:

$$\begin{aligned}(f \star g)(t) &= \int_{-\infty}^{t-1} e^{1-t+2\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \left[\tfrac{1}{2}e^{1-t+2\tau}\right]_{-\infty}^{t-1} \\ &= \tfrac{1}{2}e^{t-1}\end{aligned}$$

Aan de andere kant, voor $t-1>0$, krijgen we:

$$\begin{aligned}(f \star g)(t) &= \int_{-\infty}^{0} e^{1-t+2\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \left[\tfrac{1}{2}e^{1-t+2\tau}\right]_{-\infty}^{0} \\ &= \tfrac{1}{2}e^{1-t}\end{aligned}$$

Als we deze twee gevallen samenvoegen krijgen we:

$$(f \star g)(t) = \tfrac{1}{2}e^{-|t-1|}$$

Dat laatste laat zien dat er hetzelfde uit komt als via de Fouriertransformatie.

4.

Gegeven is de ruimte ℓ_2 van oneindige rijtjes:

$$x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

waarvoor geldt:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2} < \infty$$

We hebben de volgende lineaire afbeelding $\mathcal{A} : \ell_2 \to \ell_2$ gedefinieerd door:

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots) \to (0, 2x_1 + x_2, 2x_2 + x_3, 2x_3 + x_4, \ldots)$$

Met andere woorden $\mathcal{A}x = y$ met $y_{i+1} = 2x_i + x_{i+1}$ voor $i > 1$ en $y_1 = 0$.

a) Bepaal de nulruimte van de afbeelding $\mathcal{A}$, d.w.z. $\ker(\mathcal{A})$.

Als $\mathcal{A}x = 0$ dan moet gelden:

$$2x_i + x_{i+1} = 0$$

voor $i = 1, 2, \ldots$. Dit levert op:

$$x_{i+1} = (-2)\, x_i = (-2)^2\, x_i = \cdots = (-2)^i\, x_1$$

Dus geldt

$$x = x_1(1, -2, 4, -8, \cdots)$$

Echter dit impliceert dat $x \notin \ell^2$ omdat

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 = \infty$$

tenzij $x_1 = 0$. Dit impliceert dat $\ker \mathcal{A} = \{0\}$.

b) Toon aan dat $\mathcal{A}$ een begrensde lineaire afbeelding is.

We hebben

$$\|\mathcal{A}x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (2x_i + x_{i+1})^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2(2x_i)^2 + 2x_{i+1}^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} 8x_i^2 + 2x_{i+1}^2 \leq 10 \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 = 10\|x\|^2$$

We hebben dus:

$$\|\mathcal{A}x\| \leq \sqrt{10}\|x\|$$

voor alle $x \in \ell_2$ hetgeen betekent dat $\mathcal{A}$ een begrensde afbeelding is.

5.

Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$y^{(2)}(t) + y^{(1)}(t) - 2y(t) = 3u^{(1)}(t) + 9u(t). \tag{1}$$

a) Bepaal de impulsresponsie van (1).

We hebben omdat alle begincondities nul zijn

$$s^2Y(s) + sY(s) - 2Y(s) = 3sU(s) + 9U(s)$$

en dus:

$$Y(s) = \frac{3s+9}{s^2+s-2}U(s)$$

We vinden de impulsresponsie door de inverse Laplace transformatie los te laten op de overdrachtsfunctie

$$H(s) = \frac{3s+9}{s^2+s-2} = \frac{4}{s-1} - \frac{1}{s+2}$$

We krijgen dan dat de impulsresponsie gelijk is aan:

$$h(t) = 4e^t\, \mathbb{1}(t) - e^{-2t}\, \mathbb{1}(t)$$

b) Bepaal de stapresponsie van (1).

We hebben voor $t > 0$:

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{0-}^{t} (4e^{\tau} - e^{-2\tau})\, \mathbb{1}(\tau)\, \mathrm{d}\tau \\ &= \int_{0-}^{t} 4e^{\tau} - e^{-2\tau}\, \mathrm{d}\tau \\ &= \left[4e^{\tau} + \tfrac{1}{2}e^{-2\tau}\right]_0^t \\ &= 4e^{t} + \tfrac{1}{2}e^{-2t} - \tfrac{9}{2} \end{aligned}$$

We krijgen dus:

$$g(t) = \left(4e^{t} + \tfrac{1}{2}e^{-2t} - \tfrac{9}{2}\right) \mathbb{1}(t)$$

c) Als ingang kiezen we $u(t) = e^t$. Bepaal de oplossing voor $t > 0$ van (1) met $y(0^-) = 1$ en $y'(0^-) = 0$.

Als de begincondities niet nul zijn krijgen we:

$$\begin{aligned} y^{(1)}(t) &\longleftrightarrow sY(s) - y(0^-) = sY(s) - 1 \\ y^{(2)}(t) &\longleftrightarrow s(sY(s) - 1) - y'(0^-) = s^2Y(s) - s \end{aligned}$$

We hebben:

$$U(s) = \frac{1}{s-1}$$

en

$$u^{(1)}(t) \longleftrightarrow sU(s) - u(0^-) = \frac{s}{s-1} - 1 = \frac{1}{s-1}$$

wat natuurlijk logisch is want $u^{(1)}(t) = u(t)$. We krijgen:

$$(s^2 + s - 2)Y(s) - s - 1 = \frac{12}{s-1}$$

en dus

$$(s^2 + s - 2)Y(s) = s + 1 + \frac{12}{s-1}$$

Dus:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s+1}{(s+2)(s-1)} + \frac{12}{(s-1)^2(s+2)} \\ &= \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2} \end{aligned}$$

Om A, B, C te bepalen brengen we alles onder één noemer en we krijgen:

$$(s+1)(s-1) + 12 = A(s-1)^2 + B(s-1)(s+2) + C(s+2)$$

en we vinden

$$A = \tfrac{5}{3}, \quad B = -\tfrac{2}{3}, \quad C = 4,$$

en dus:

$$Y(s) = \frac{5}{3(s+2)} - \frac{2}{3(s-1)} + \frac{4}{(s-1)^2}$$

en we vinden:

$$y(t) = \left[\tfrac{5}{3}e^{-2t} - \tfrac{2}{3}e^{t} + 4te^{t} \right] \mathbb{1}(t).$$