Kenmerk : H.Zwart/sand-TW/tentamens/tent04-nov
Datum : 22 oktober 2004

Vak	:	**Signalen en Transformaties**
Vakcode	:	156081
Datum	:	Maandag, 1 november 2004
Tijdstip	:	09.00–12.00
Plaats	:	SC-0

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Een rekenmachine mag niet gebruikt worden.

1. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$y^{(2)}(t) + 3y^{(1)}(t) + 2y(t) = u^{(1)}(t) + 2u(t). \tag{1}$$

   (a) Bepaal de homogene oplossing van deze differentiaalvergelijking.

   (b) Gegeven is dat $u(t) = 1, t \in \mathbb{R}$. Bepaal de algemene oplossing van (1).

   (c) Bepaal de frequentieresponsie van het systeem (1).

   (d) Bepaal de impulseresponsie $h(t)$ van (1) voor $t \in \mathbb{R}$.

2. Bepaal op twee (verschillende) manieren de convolutie van $f(t) = e^{-t}\,\mathbb{1}(t)$ en $g(t) = 3e^{2t}\,\mathbb{1}(t)$.

3. De student Theo Natus en z'n vriendin Thea Wissels hebben een verschil van mening[1] over de afgeleide van een convolutie. Beide nemen aan dat f en g functies zijn van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{C}$ met de eigenschap dat ze absoluut integreerbaar zijn. Dus $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$ en $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|dt < \infty$. Verder geldt dat f en g nul zijn in plus en min oneindig.

   Theo beweert dat voor de afgeleide van de convolutie het volgende geldt:

$$\frac{d}{dt}\left(f * g\right)(t) = \left(f^{(1)} * g\right)(t).$$

   Terwijl Thea beweert dat

$$\frac{d}{dt}\left(f * g\right)(t) = \left(f^{(1)} * g\right)(t) + \left(f * g^{(1)}\right)(t).$$

   Hierbij is $f^{(1)}$ de afgeleide van f en $g^{(1)}$ de afgeleide van g.

   Wie heeft er gelijk, en waarom?

Z.O.Z.

[1] Het is later allemaal bijgelegd, en ze zullen nog een beroemd duo gaan vormen

4. De overdrachtsfunctie van de vierde orde Butterworth filter is gegeven als

$$G(s) = \frac{1}{s^4 + 2.6131\, s^3 + 3.4142\, s^2 + 2.6131\, s + 1}. \tag{2}$$

Deze kan ook geschreven worden als

$$G(s) = \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)}.$$

met

$$s_1 = e^{i5\pi/8}, \quad s_2 = e^{i7\pi/8}, \quad s_3 = e^{i9\pi/8}, \quad e^{i11\pi/8}.$$

In Figuur 1 staat voor positieve freqenties het argument (fase) en absolute waarde van $G(i\omega)$ getekend. Het argument staat in radialen.

(a) Teken de punten s_1 t/m s_4 in het complexe vlak.

(b) Welke differentiaalvergelijking heeft als overdrachtsfunctie $G(s)$?

(c) Schets voor negatieve frequenties het argument en de absolute waarde van $G(i\omega)$.

(d) Bepaal de complexe Fourier reeks van $u(t) = \cos(0.1\, t) + \sin(3\, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(e) Het signaal $u(t)$ wordt nu als ingang voor het Butterworth filter gekozen. Bepaal de corresponderende uitgang.
Merk op: Het antwoord hoeft niet exact te zijn. U mag dus schattend rekenen met een nauwkeurigheid van 0.1.

(f) Is het om door tijdsschaling het Butterworth filter zo aan te passen dat de uitgang corresponderende bij $u(t)$ (bijna) gelijk wordt aan $u(t)$?
Zo ja, leg uit hoe dat gaat doen. Zo nee, waarom niet.

5. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$y^{(2)}(t) + 4y(t) = 2u^{(2)}(t). \tag{3}$$

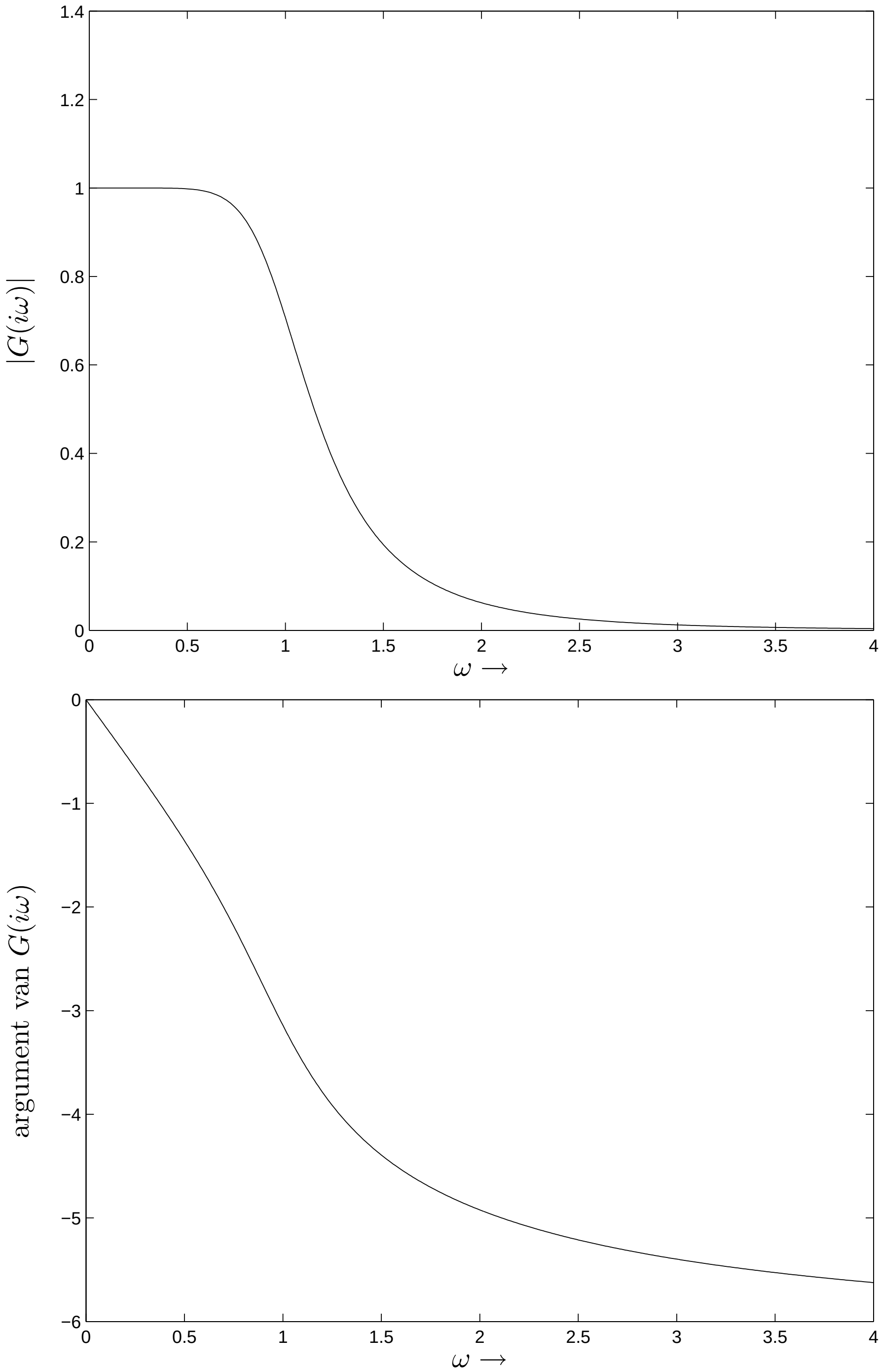
(a) Bepaal de stapresponsie van (3).

(b) Los de differentiaalvergelijking (3) op voor $t \geq 0$ als gegeven is dat $u(t) = 4t\, \mathbb{1}(t)$ en $y(0^-) = 0$, $y^{(1)}(0^-) = -8$.

Normering:

1	a	:	4	2	:	12	3	:	8	4	a	:	5	5	a	:	6
	b	:	5								b	:	4		b	:	8
	c	:	6								c	:	5				
	d	:	6								d	:	7				
											e	:	8				
											f	:	6				

Totaal: 90 + 10 = 100 punten



Figuur 1: Het argument en de absolute waarde van $G(i\omega)$

Laplace getransformeerden:

$f(t),\, t \geq 0$	$F(s)$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$t^n e^{at}$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$e^{bt}\sin(at)$	$\dfrac{a}{(s-b)^2+a^2}$
$e^{bt}\cos(at)$	$\dfrac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$
$\delta(t)$	1

Fourier getransformeerden:

$f(t)$	$\hat{f}(\omega)$	Voorwaarde
$e^{-at}\,\mathbb{1}(t)$	$\dfrac{1}{i\omega+a}$	$\mathrm{Re}(a) > 0$
$t^n e^{-at}\,\mathbb{1}(t)$	$\dfrac{n!}{(i\omega+a)^{n+1}}$	$\mathrm{Re}\ (a) > 0$
$-e^{at}\,\mathbb{1}(-t)$	$\dfrac{1}{(i\omega-a)}$	$\mathrm{Re}\ (a) > 0$
$-t^n e^{at}\,\mathbb{1}(-t)$	$\dfrac{n!}{(i\omega-a)^{n+1}}$	$\mathrm{Re}\ (a) > 0$
$\mathrm{rect}_a(t)$	$a\,\mathrm{sinc}(a\omega/2)$	$a > 0$
$\delta(t)$	1	
1	$2\pi\delta(t)$	
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0))$	$\omega \in \mathbb{R}$