E

Solution to the exams

E.1 Solution (and hints) to the test exam

1. a) $y_{\mathrm{h}}(t) = \alpha_1 \mathrm{e}^{-t} + \alpha_2 t\mathrm{e}^{-t}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$

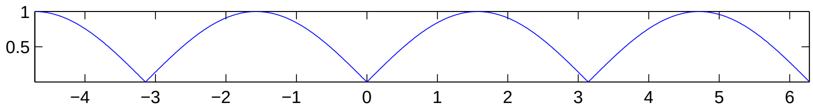
   b) $y(t) = \frac{4}{9}\mathrm{e}^{2t} + \alpha_1 \mathrm{e}^{-t} + \alpha_2 t\mathrm{e}^{-t}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$
   Hint: $G(2) = \frac{4}{9}$

   c) $y(t) = \delta(t) + (t-2)\mathrm{e}^{-t}\,\mathbb{1}(t)$
   Hint: Bepaal $\mathcal{L}^{-1}(G(s))$

2. a) $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathbb{1}(t) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t}\,\mathbb{1}(-t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|t|}$
   Hint: zie opgave 1.25.a en 3.8.a

   b) Hint: $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}$

3. a)



   periode $T = \pi$

   b) $f_k = -\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{4k^2-1}$
   Hint : pas interval-shift toe en gebruik $\sin(t) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})/2\mathrm{i}$.
   Opm. Zie voorbeeld 2.3.4 voor een alternatieve berekening van de (reële) fouriercoëfficiënten.

   c) $-\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{4k^2-1}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kt} \qquad \left(= \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{4k^2-1}\cos(2kt)\right)$

   d) $\frac{1}{2}$
   Hint: vul $t=0$ in. N.B. $|\sin(t)|$ is continu.

   e) $y_k = \dfrac{2}{\pi(2\mathrm{i}k+10)(1-4k^2)}$

4. a) $y(t) = 5\mathrm{e}^{-t} - 4\mathrm{e}^{-2t} + \left(6 - 12\mathrm{e}^{1-t} + 6\mathrm{e}^{2-2t}\right)\mathbb{1}(t-1)$
   Hints: pas links en rechts Laplace-transformatie toe, gebruik hierbij onderdeel (a). Denk om de beginvoorwaarden! Bepaal $Y(s)$ $(:= \mathcal{L}(y(t))$ en bereken $\mathcal{L}^{-1}(Y(s))$. Gebruik hierbij opnieuw onderdeel (a).

E.2 Solutions to the exam of 1-11-2004

1. a. De nulpunten van het karakteristieke polynoom $\lambda^2 + 3\lambda + 2$ worden gegeven door $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$. Dus

$$y_{\text{hom}}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \qquad c_i \in \mathbb{R} \quad \text{of} \quad \mathbb{C}.$$

   b. Het proberen van een constante, geeft

$$y_{\text{part}}(t) = 1, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

   Dus de algemene oplossing is

$$y)t) = y_{\text{hom}}(t) + y_{\text{part}}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + 1.$$

   c. De frequentieresponsie wordt gegeven door

$$\hat{h}(\omega) = \frac{i\omega + 2}{(i\omega)^2 + 3(i\omega) + 2} = \frac{1}{i\omega + 1}$$

   d. De Fourier getransformeerde van de impulseresponsie is gelijk aan de frequentieresponsie. Door middel van de inverse Fourier transformatie vinden we

$$h(t) = e^{-t}\,\mathbb{1}(t)$$

2. **Eerste methode; Door middel van Laplace transformatie**

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(f * g)\}(s) = F(s)G(s) &= \frac{1}{s+1} \cdot \frac{3}{s-2} \\ &= \frac{3}{(s+1)(s-2)} = \frac{-1}{s+1} + \frac{1}{s-2}\end{aligned}$$

   Dus met behulp van de tabel vinden we

$$(f * g)(t) = (-e^{-t} + e^{2t})\,\mathbb{1}(t).$$

   Tweede methode; Door middel van directe berekening

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \int_{-\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)}\,\mathbb{1}(t-\tau)3e^{2\tau}\,\mathbb{1}(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t 3e^{-t+\tau}e^{2\tau}d\tau\,\mathbb{1}(t) \\ &= 3e^{-t}\int_0^t e^{3\tau}d\tau\,\mathbb{1}(t) \\ &= e^{-t}\left[e^{3\tau}\right]_0^t\,\mathbb{1}(t) = (e^{2t} - e^{-t})\,\mathbb{1}(t).\end{aligned}$$

3. Dit kan via directe controle. Dus

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[f * g](t) &= \frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dt}(t-\tau)g(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f^{(1)}(t-\tau)g(\tau)d\tau = (f^{(1)} * g)(t).\end{aligned}$$

Of via Fourier Transformatie. We weten dat

$$f * g \overset{\mathfrak{F}_{cc}}{\longleftrightarrow} f(\omega)g(\omega), \qquad \text{en}$$

$$f^{(1)} \overset{\mathfrak{F}_{cc}}{\longleftrightarrow} \mathrm{i}\omega f(\omega).$$

Dus

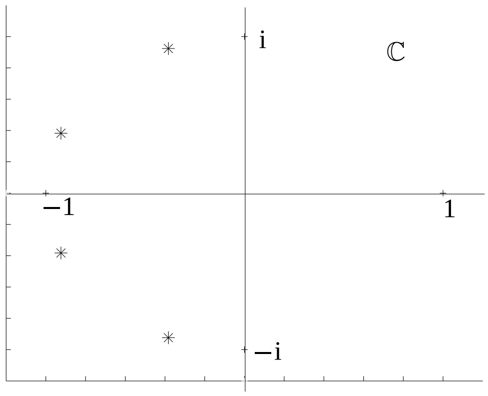
$$\frac{d}{dt}(f * g)(t) \overset{\mathfrak{F}_{cc}}{\longleftrightarrow} \mathrm{i}\omega \cdot \mathcal{F}_{cc}(f * g) = \mathrm{i}\omega \cdot f(\omega)g(\omega).$$

Verder krijgen we dat

$$f^{(1)} * g \overset{\mathfrak{F}_{cc}}{\longleftrightarrow} \mathcal{F}_{cc}(f^{(1)})(\omega) \cdot g(\omega) = \mathrm{i}\omega f(\omega) \cdot g(\omega).$$

Dus Theo heeft gelijk.

4. a. De absolute waarde van $e^{i\varphi}$ is 1 en het argument is φ. Dus de de tekening is



b. De bijbehorende differentiaalvergelijking wordt gegeven door

$$y^{(4)}(t) + 2.6131y^{(3)}(t) + 3.4142y^{(2)}(t) + 2.6131y^{(1)}(t) + y(t) = u(t).$$

c. $G(-i\omega) = G(i\omega)^*$. Dus de absolute waarden zijn gelijk, en de argumenten zijn tegengesteld.

d. De periode van $u(t)$ is $T = 20\pi$, namelijk de periode van de traagste.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 0.1,$$

$$u(t) = \frac{e^{i0.1t} + e^{-i0.1t}}{2} + \frac{e^{i3t} - e^{-i3t}}{2i}$$
$$= \frac{1}{2}e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-i\omega_0 t} + \frac{1}{2i}e^{i30\omega_0 t} - \frac{1}{2i}e^{-i30\omega_0 t}.$$

Dus de Fouriercoëfficiënten worden gegeven door

$$u_k = \begin{cases} \frac{-1}{2i} & k = -30 \\ \frac{1}{2} & k = -1 \\ \frac{1}{2} & k = 1 \\ \frac{1}{2i} & k = 30 \\ 0 & k \notin \{-30, -1, 1, 30\} \end{cases}$$

e. De Fourier coefficienten van $y(t)$ zijn $y(k) = G(i\omega_0 k)u_k$. Dus $y_k = 0$ als $|k| \neq 1$ of als $|k| \neq 30$. Omdat $G(\pm 3\mathrm{i}) \approx 0$, krijgen we $y_{30} \approx 0$ en $y_{-30} \approx 0$. Verder krijgen we

$$y_1 = G(0.1\mathrm{i})u_1 \approx u_1$$

$$y_{-1} = G(-0.1\mathrm{i})u_{-1} \approx u_{-1}.$$

Dus $y(t) \approx \cos(0.1t)$.

f. De signalen zijn dezelfde als in onderdeel (d), er is alleen een fase draaiing. Dus de tweede valt weer weg, en we vinden

$$y(t) = \cos(0.1t + \pi/2).$$

5. a. Voor een stapresponsie geldt dat $y(0^-) = y(0^-) = 0$ en $u(t) = \mathbb{1}(t)$. Dus via Laplace transformatie

$$Y(s) = \frac{2s^2}{s^2+4} \cdot \frac{1}{s} = \frac{2s}{s^2+4}$$

Uit tabel volgt dat $y(t) = 2\cos(2t)$ voor $t > 0$. Omdat systeem in rust was tot het tijdstip nul, geldt $y(t) = 0$ voor $t < 0$.

b. De Laplace getransformeerde van de ingang wordt gegeven door

$$U(s) = \frac{4}{s^2}.$$

Met behulp van de regels van Laplace transformatie vinden we

$$s^2Y(s) - y^{(1)}(0^-) - sy(0^-) + 4Y(s) = 2s^2U(s) - 2su(0^-) - 2u^{(1)}(0^-) = 8.$$

Oftewel

$$(s^2+4)Y(s) = 8 + (-8) = 0.$$

Hieruit volgt dat $Y(s) = 0$, en dus

$$y(t) = 0, \qquad t \geq 0.$$