Vak	:	**Signalen en Transformaties**
Vakcode	:	156081
Datum	:	Maandag, 17 januari 2005
Tijdstip	:	9.00–12.00
Plaats	:	SC-0

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Een rekenmachine mag niet gebruikt worden.
Een A-4 met handgeschreven aantekingen alsmede een VWO formuleblad mag wel gebruikt worden.

1. Beschouw de volgende differentiaalvergelijking

$$y^{(2)}(t) + 2y^{(1)}(t) + 2y(t) = 10u^{(1)}(t) + 10u(t). \tag{1}$$

   (a) Bepaal de homogene oplossing van (1).

   (b) Bepaal een particuliere oplossing van (1) als gegeven is dat $u(t) = e^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$.

   (c) Toon met behulp van de definitie aan dat de Laplacegetransformeerde van $f(t) = e^{at}\cos(bt)$, $t \geq 0$, gegeven wordt door

$$F(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}.$$

   (d) Bepaal de impulsresponsie van de differentiaalvergelijking (1).

   (e) We kiezen nu $u(t) = e^{-t}\,\mathbb{1}(t)$. Toon aan dat er waarden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ bestaan zodanig dat voor $y(0^-) = \alpha$, $y^{(1)}(0^-) = \beta$ de oplossing $y(t)$ van (1) gelijk is aan nul voor $t > 0$. Bepaal deze α en β.

2. Van het signaal $h(t)$ wordt de Fouriergetransformeerde gegeven door $\hat{h}(\omega)$. Deze Fouriergetransformeerde is getekend in Figuur 3.

   (a) Bepaal $h(t)$ in reële vorm.

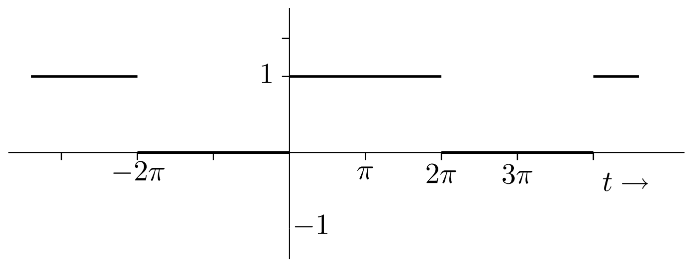
   (b) Schets de Fouriergetransformeerde van $h(t)\cos(5t)$.

3. De studenten Twan Weetal, Trio Nautus en Theo Elle-Langhus hebben een groot veschil van mening. In de kerstvakantie bracht Theo een bezoek aan zijn oom, graaf Theodurus Elle-Langhus. Deze was nog in het bezit van collegeaantekeningen uit een ver verleden, ±1979, toen hij nog studeerde. Daarin stond dat als f en g oneven functies zijn, dan is het convolutieproduct van f en g even. Omdat Theo later wil erven van zijn oom, gelooft hij zijn oom onvoorwaardelijk. Twan beweert dat de uitkomst oneven moet zijn, daarbij verwijst hij naar de eigenschap over getallen. Volgens Trio is geen van beide waar. Aan u de schone taak om uit te zoeken wie er gelijk heeft. Om de vraag iets wiskundiger en dus duidelijker te stellen hieronder de notatie en voorwaarden.

   f en g zijn functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ die absoluut integreerbaar zijn, d.w.z. $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt < \infty$ en $\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|dt < \infty$. Men weet nu dat $f(-t) = -f(t)$ en $g(-t) = -g(t)$ voor $t \in \mathbb{R}$. Verder definieert men h als het convolutieproduct van f en g, dus $h = f * g$. De vraag is dus; wat voor eigenschap heeft h: even, oneven, of geen van beide.

Z.O.Z.

4. Gegeven is het periodieke signaal $u(t)$ zoals getekend in Figuur 1.



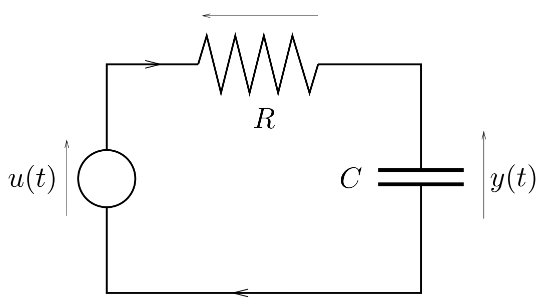
Figuur 1: Het signaal "nul–een"

(a) Toon aan dat de (complexe) Fouriercoëficiënten van $u(t)$ gegeven worden door

$$u_k = \begin{cases} \dfrac{i(-1+(-1)^k)}{2k\pi}, & k \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & k = 0 \end{cases}$$

(b) Bepaal de reële Fouriercoëffiënten van $u(t)$.

Beschouw nu het RC-netwerk zoals getekend in Figuur 2. Het model van dit netwerk



Figuur 2: Een RC-netwerk

wordt gegeven door de volgende differentiaalvergelijking

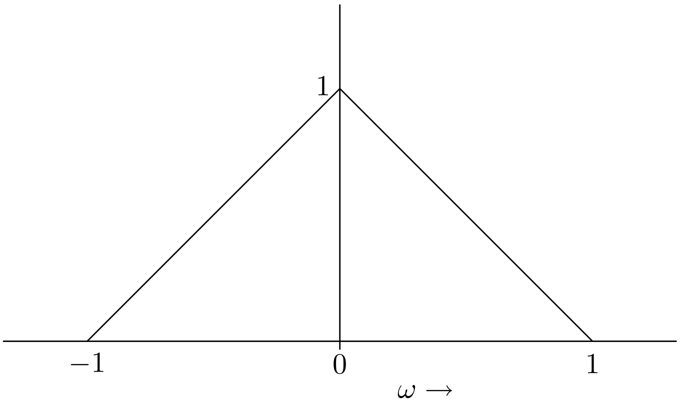
$$\mathrm{RC}\, y^{(1)}(t) + y(t) = u(t). \tag{2}$$

(c) Bepaal de frequentieresponsie van de differentiaalvergelijking (2).

(d) Het signaal $u(t)$ uit Figuur 1 wordt nu als ingang voor het RC-netwerk gekozen gekozen. Toon aan dat voor de complexe Fouriercoëffiënten, y_k, van y geldt dat $y_k = 0$ voor even k, $k \neq 0$.

(e) Hoe groot (of klein) moet je RC kiezen als je wilt dat de absolute waarde van de Fouriercoëffiënten van de uitgang y vanaf de index tien kleiner zijn dan 10^{-4}?

Merk op: Men mag bij dit laatste onderdeel schattend rekenen. Dus het antwoord hoeft niet exact te zijn.



Figuur 3: Het signaal "tent"

Normering:

1	a	:	4	2	a	:	8	3	:	9	4	a	:	10
	b	:	5		b	:	7					b	:	6
	c	:	7									c	:	5
	d	:	6									d	:	7
	e	:	9									e	:	7

Totaal: 90 + 10 = 100 punten

Laplacegetransformeerden:

$f(t),\ t \geq 0$	$F(s)$	Voorwaarde
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	$a \in \mathbb{C}$
$t^n e^{at}$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$n \in \mathbb{N}$
$e^{at}\sin(bt)$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$a, b \in \mathbb{R}$
$e^{at}\cos(bt)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	$a, b \in \mathbb{R}$
$\delta(t)$	1	

Fouriergetransformeerden:

$f(t)$	$\hat{f}(\omega)$	Voorwaarde
$e^{-at}\,\mathbb{1}(t)$	$\dfrac{1}{i\omega+a}$	$\mathrm{Re}(a) > 0$
$t^n e^{-at}\,\mathbb{1}(t)$	$\dfrac{n!}{(i\omega+a)^{n+1}}$	$\mathrm{Re}(a) > 0,\ n \in \mathbb{N}$
$-e^{at}\,\mathbb{1}(-t)$	$\dfrac{1}{(i\omega-a)}$	$\mathrm{Re}(a) > 0$
$-t^n e^{at}\,\mathbb{1}(-t)$	$\dfrac{n!}{(i\omega-a)^{n+1}}$	$\mathrm{Re}(a) > 0,\ n \in \mathbb{N}$
$\mathrm{rect}_a(t)$	$a\,\mathrm{sinc}(a\omega/2)$	$a > 0$
$\delta(t)$	1	
1	$2\pi\delta(\omega)$	
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0))$	$\omega_0 \in \mathbb{R}$