UNIVERSITEIT TWENTE
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Uitwerking tentamen Signalen en Transformaties (156081) op maandag 29 oktober 2007, 9.00 – 12.00 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!

1.

Een 3-periodiek signaal $f(t)$ wordt op het interval $[-1,2)$ gegeven door

$$f(t)=\begin{cases}1 & -1\le t<0,\\ -1 & 0\le t<2.\end{cases}$$

a) Toon aan dat het lijnenspectrum van f gelijk is aan

$$f_k=\begin{cases}\frac{i}{k\pi}\left(1-e^{ik2\pi/3}\right) & k\neq 0,\\ -\frac{1}{3} & k=0.\end{cases}$$

We hebben voor $k\neq 0$:

$$\begin{aligned}
f_k &= \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} f(t)e^{-ik\omega_0 t}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} e^{-ik\omega_0 t}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{3}\int_{0}^{2} e^{-ik\omega_0 t}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{-3ik\omega_0}\left[e^{-ik\omega_0 t}\right]_{-1}^{0}-\frac{1}{-3ik\omega_0}\left[e^{-ik\omega_0 t}\right]_{0}^{2}\\
&= \frac{1}{-3ik\omega_0}\left(1-e^{ik\omega_0}-e^{-2ik\omega_0}+1\right)
\end{aligned}$$

Gebruik makend van $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{3}$ krijgen we:

$$f_k=\frac{i}{2k\pi}\left(2-e^{2ik\pi/3}-e^{-4ik\pi/3}\right)$$

en aangezien:

$$e^{2ik\pi/3}=e^{-4ik\pi/3}$$

krijgen we het gegeven antwoord voor $k\neq 0$.

Voor $k=0$ hebben we:

$$\begin{aligned}
f_0 &= \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} 1\,\mathrm{d}t-\frac{1}{3}\int_{0}^{2} 1\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

en ook dat komt overeen met het gegeven antwoord.

b) Bepaal de reële Fourierreeks.

We weten dat de reële Fourierreeks wordt gegeven door:

$$\tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t).$$

We weten dat $\omega_0 = \frac{2\pi}{3}$ en $2f_k = a_k - ib_k$. We vinden dus $a_0 = -\frac{2}{3}$ en voor $k > 0$:

$$\begin{aligned} f_k &= \frac{i}{k\pi}\left(1 - e^{ik2\pi/3}\right) \\ &= \frac{i}{k\pi}\left(1 - \cos(\tfrac{2k\pi}{3}) - i\sin(\tfrac{2k\pi}{3})\right) \\ &= \frac{1}{k\pi}\sin(\tfrac{2k\pi}{3}) + i\frac{1}{k\pi}\left(1 - \cos(\tfrac{2k\pi}{3})\right) \end{aligned}$$

en dus:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{k\pi}\sin(\tfrac{2k\pi}{3}) \\ b_k &= \frac{2}{k\pi}\left(1 - \cos(\tfrac{2k\pi}{3})\right) \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat de reële Fourierreeks gelijk is aan:

$$-\tfrac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{2}{k\pi}\left[\sin(\tfrac{2k\pi}{3})\cos(\tfrac{2k\pi t}{3}) + \left(1 - \cos(\tfrac{2k\pi}{3})\right)\sin(\tfrac{2k\pi t}{3})\right].$$

c) Is de reële Fourierreeks overal gelijk aan de functie $f(t)$?

Als de functie continu is in een punt dan is in dat punt de Fourierreeks altijd gelijk aan de functie. We moeten alleen de punten waar de functie niet continu is nader controleren. In het punt 0 maakt de functie een sprong van 1 naar -1. Daar is de Fourierreeks gelijk aan:

$$\frac{f(0-) + f(0+)}{2} = 0$$

maar de functie voldoet aan $f(0) = -1$. De functie is dus niet overal gelijk aan de Fourierreeks.

d) Bereken het amplitudespectrum $\lvert g_k \rvert$ van het signaal $g(t) = f(t-1)$.

Bij een tijdverschuiving van een functie zal alleen het fasespectrum veranderen. Het amplitudespectrum blijft gelijk en we hebben dus:

$$\lvert g_k \rvert = \lvert f_k \rvert$$

en we vinden $\lvert g_0 \rvert = \frac{1}{3}$ terwijl voor $k \neq 0$:

$$\begin{aligned} \lvert g_k \rvert &= \frac{1}{k\pi}\left\lvert 1 - e^{ik2\pi/3}\right\rvert \\ &= \frac{1}{k\pi}\left[\left(1 - \cos(\tfrac{2k\pi}{3})\right)^2 + \sin^2(\tfrac{2k\pi}{3})\right] \\ &= \frac{1}{k\pi}\left[2 - 2\cos(\tfrac{2k\pi}{3})\right] \end{aligned}$$

2.

Van een ideaal laagdoorlatend filter wordt de frequentieresponsie $H(\omega)$ gegeven door

$$H(\omega) = \text{trian}_\pi(\omega)e^{-i\omega t_0}.$$

Hierin is $t_0 > 0$.

a) Bepaal de impulsresponsie $h(t)$ van het systeem.

We hebben:

$$\begin{aligned}
\text{trian}_\pi(t) &\longleftrightarrow \frac{4\sin^2(\frac{\pi\omega}{2})}{\pi\omega^2} \\
\frac{4\sin^2(\frac{\pi t}{2})}{\pi t^2} &\longleftrightarrow 2\pi\ \text{trian}_\pi(-\omega) \\
\frac{4\sin^2(\frac{\pi t}{2})}{\pi t^2} &\longleftrightarrow 2\pi\ \text{trian}_\pi(\omega) \\
\frac{2\sin^2(\frac{\pi t}{2})}{\pi^2 t^2} &\longleftrightarrow \text{trian}_\pi(\omega) \\
\frac{2\sin^2(\frac{\pi(t-t_0)}{2})}{\pi^2 (t-t_0)^2} &\longleftrightarrow \text{trian}_\pi(\omega)e^{-i\omega t_0}
\end{aligned}$$

We vinden:

$$h(t) = \frac{2\sin^2(\frac{(t-t_0)\omega}{2})}{\pi^2(t-t_0)^2}$$

Aan het systeem wordt een ingangssignaal

$$u(t) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}t)}{t}$$

toegevoerd.
Zij $y(t)$ de responsie van het systeem op het gegeven ingangssignaal $u(t)$.

b) Schets het amplitudespectrum van $y(t)$ en bereken de energie-inhoud van dit signaal.

We hebben:

$$\begin{aligned}
\text{rect}_\pi(t) &\longleftrightarrow \frac{2\sin(\frac{\pi\omega}{2})}{\omega} \\
\frac{2\sin(\frac{\pi t}{2})}{t} &\longleftrightarrow 2\pi\,\text{rect}_\pi(-\omega) \\
\frac{2\sin(\frac{\pi t}{2})}{t} &\longleftrightarrow 2\pi\,\text{rect}_\pi(\omega) \\
\frac{\sin(\frac{\pi t}{2})}{t} &\longleftrightarrow \pi\,\text{rect}_\pi(\omega)
\end{aligned}$$

en dus is de Fouriergetransformeerde van $u(t)$ gelijk aan:

$$U(\omega) = \pi\,\text{rect}_\pi(\omega)$$

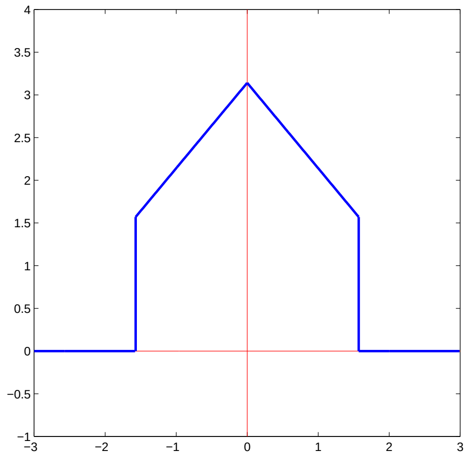
We krijgen:

$$Y(\omega) = H(\omega)U(\omega) = \pi \operatorname{rect}_\pi(\omega) \operatorname{trian}_\pi(\omega) e^{-i\omega t_0}$$

en dus:

$$|Y(\omega)| = \pi \operatorname{rect}_\pi(\omega) \operatorname{trian}_\pi(\omega)$$

We hebben:



De energieinhoud van $y(t)$ is gelijk aan:

$$E_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 \, d\omega$$

en we vinden

$$E_y = \frac{7\pi^2}{24}$$

c) Bereken de kruis spectrale dichtheid $S_{u,y}$ van u en y, d.w.z. de Fouriergetransformeerde van de kruiscorrelatie $\rho_{u,y}(t)$ van u en y waar:

$$\rho_{u,y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau + t) y^*(\tau) \, d\tau$$

We hebben:

$$\rho_{u,y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t - \tau) y^*(-\tau) \, d\tau$$

en dus:

$$\rho_{u,y}(t) = (u \star g)(t)$$

met

$$g(t) = y^*(-t)$$

De Fouriergetransformeerde van $u(t)$ is gelijk aan:

$$U(\omega) = \pi \operatorname{rect}_\pi(\omega)$$

en uit de Fouriergetransformeerde van $y(t)$:

$$Y(\omega) = \pi \operatorname{rect}_\pi(\omega) \operatorname{trian}_\pi(\omega) e^{-i\omega t_0}$$

volgt dat de Fouriergetransformeerde van $g(t)$ gelijk is aan:

$$G(\omega) = \pi \operatorname{rect}_\pi(\omega) \operatorname{trian}_\pi(\omega) e^{i\omega t_0}$$

maar dan is volgens de convolutiestelling:

$$S_{u,y}(\omega) = U(\omega)G(\omega) = \pi^2 \operatorname{rect}_\pi(\omega) \operatorname{trian}_\pi(\omega) e^{i\omega t_0}.$$

3.

Bepaal de convolutie van $f(t) = \sin t$ en $g(t) = \operatorname{rect}_{2\pi}(t)$ op twee verschillende manieren.

We hebben:

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g(\tau) \, \mathrm{d}\tau$$

en we krijgen:

$$\begin{aligned}(f \star g)(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t-\tau) \, \mathrm{d}\tau \\ &= [\cos(t-\tau)]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \cos(t-\pi) - \cos(t+\pi) \\ &= 0\end{aligned}$$

Aan de andere kant, de Fouriergetransformeerde van $f(t)$ is gelijk aan:

$$F(\omega) = \frac{\pi}{i} [\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)]$$

terwijl de Fouriergetransformeerde van $g(t)$ gelijk is aan:

$$G(\omega) = \frac{2\sin(\pi\omega)}{\omega}$$

maar dan is de Fouriergetransformeerde van $(f \star g)(t)$ gelijk aan:

$$\begin{aligned}F(\omega)G(\omega) &= \frac{\pi}{i} [\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)] \frac{2\sin(\pi\omega)}{\omega} \\ &= \frac{\pi}{i} \left[\delta(\omega-1)\frac{2\sin\pi}{\pi} - \delta(\omega+1)\frac{2\sin(-\pi)}{-\pi}\right] \\ &= 0\end{aligned}$$

en dus is ook de convolutie $(f * g)(t)$ gelijk aan 0.

4.

Gegeven is de differentaalvergelijking

$$y^{(1)}(t) + y(t) = u(t).$$

Verder is gegeven dat de ingang $u(t) = \sin(t), t \in \mathbb{R}$.
Drie vrienden waren tijdens het studeren aan het kijken hoe we de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking het beste kunnen bepalen. Ron beweert dat we dit kunnen doen met Fourierreeksen omdat de ingang $u(t)$ een periodieke functie is. Harry beweert daarentegen dat we dit beter kunnen doen met behulp van de Laplacetransformatie. Hermione vindt haar vrienden maar erg dom en beweert dat ze allebei ongelijk hebben.
Aan u de vraag om uit te zoeken wie gelijk heeft en waarom. Bovendien, willen we u vragen de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking te bepalen.

Natuurlijk heeft Hermione gelijk. De Fourierreeks kan alleen periodieke oplossingen vinden. Maar de homogene vergelijking heeft als oplossing een exponentiële functie en die is niet periodiek. Aan de andere kant, Harry heeft ook ongelijk want via de Laplace transformatie werken we alleen voor $t > 0$ terwijl er een algemene oplossing wordt gezocht voor alle $t \in \mathbb{R}$.

De oplossing vinden we via het oplossen van de homogene vergelijking en het vinden van een particuliere oplossing. Voor het vinden van een oplossing van de homogene vergelijking

$$y^{(1)}(t) + y(t) = 0$$

proberen we e^{rt} en we vinden $r = -1$. De algemene oplossing van de homogene vergelijking is dus:

$$y_h(t) = Ae^{-t}$$

Voor het vinden van een particuliere oplossing proberen we een functie van dezelfde vorm als $u(t)$. In dit geval proberen we een constante $y_p(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t$ en we vinden $C_1 = \frac{1}{2}$ en $C_1 = -\frac{1}{2}$. De algemene oplossing is dus:

$$y(t) = Ae^{-t} + \tfrac{1}{2}\sin t - \tfrac{1}{2}\cos t$$

5.

Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$y^{(2)}(t) - y^{(1)}(t) - 6y(t) = u^{(1)}(t) - 3u(t). \qquad (1)$$

a) Bepaal de impulsresponsie van (1).

Om de impulsresponsie te vinden kiezen we $u(t) = \delta(t)$. We vinden na de Laplacetransformatie $U(s) = 1$ en

$$(s^2 - s - 6)Y(s) = (s-3)U(s) = s - 3$$

en dus:

$$Y(s) = \frac{s-3}{s^2 - s - 6} = \frac{s-3}{(s-3)(s+2)} = \frac{1}{s+2}$$

Kortom

$$y(t) = e^{-2t}\, \mathbb{1}(t)$$

De impulsresponsie is dus gelijk aan $e^{-2t}\, \mathbb{1}(t)$.

b) Als ingang kiezen we $u(t) = 5\, \mathbb{1}(t)$. Bepaal alle begrensde oplossingen voor $t > 0$ van (1).

We hebben:

$$\begin{aligned} y(t) &\longleftrightarrow Y(s) \\ y'(t) &\longleftrightarrow sY(s) - y(0-) \\ y''(t) &\longleftrightarrow s^2Y(s) - sy(0-) - y'(0-) \end{aligned}$$

aan de andere kant:

$$\begin{aligned} u(t) &\longleftrightarrow U(s) = \tfrac{5}{s} \\ u'(t) &\longleftrightarrow sU(s) - u(0-) = 5 \end{aligned}$$

We vinden:

$$(s^2 - s - 6)Y(s) = 5 - \frac{15}{s} + sy(0-) + y'(0-) - y(0-)$$

en dus:

$$Y(s) = \tfrac{1}{s^2-s-6}\left[5 - \frac{15}{s} + sy(0-) + y'(0-) - y(0-)\right]$$

of

$$Y(s) = \tfrac{5}{s^2-s-6} - \tfrac{15}{s(s^2-s-6)} - \tfrac{s}{s^2-s-6}y(0-) - \tfrac{1}{s^2-s-6}\left(y'(0-) - y(0-)\right)$$

We krijgen:

$$\begin{aligned} Y(s) = \left(\tfrac{1}{s-3} - \tfrac{1}{s+2}\right) + \left(\tfrac{5}{2s} - \tfrac{1}{s-3} - \tfrac{3}{2(s+2)}\right) - \left(\tfrac{3}{5(s-3)} + \tfrac{2}{5(s+2)}\right) y(0-) \\ - \left(\tfrac{1}{5(s-3)} - \tfrac{1}{5(s+2)}\right)\left(y'(0-) - y(0-)\right) \end{aligned}$$

en

$$Y(s) = \frac{5}{2s} - \frac{5}{2(s+2)} - \frac{1}{5(s-3)}\left(2y(0-) + y'(0-)\right) - \frac{1}{5(s+2)}\left(3y(0-) - y'(0-)\right)$$

Via de inverse Laplace transformatie krijgen we:

$$y(t) = \frac{5}{2}\,\mathbb{1}(t) - \frac{5}{2}e^{-2t}\,\mathbb{1}(t) - \frac{1}{5}\left(2y(0-) + y'(0-)\right)e^{3t}\,\mathbb{1}(t) - \frac{1}{5}\left(3y(0-) - y'(0-)\right)e^{-2t}\,\mathbb{1}(t)$$

Om een begrensde oplossing te krijgen moeten we hebben dat $2y(0-) + y'(0-) = 0$. We kunnen door een geschikte keuze van de begincondities $3y(0-) - y'(0-)$ willekeurig kiezen zelfs onder de conditie $2y(0-) + y'(0-) = 0$. Alle begrensde oplossing worden dus gegeven door:

$$y(t) = \frac{5}{2}\,\mathbb{1}(t) + Ae^{-2t}\,\mathbb{1}(t)$$

c) Gegeven $u(t) = 1$ voor $t > 1$ bepaal alle oplossingen van (1) voor $t > 1$ gegeven $y(1) = 1$ en $y'(1) = 0$.

Je kunt dit op twee manieren oplossen. Door een verschuiving kunnen we eerst een oplossing vinden met $u(t) = 1$ voor $t > 0$ gegeven $y(0) = 1$ en $y'(0) = 0$ en dan de oplossing terugschuiven. Een andere methode is eerst de algemene oplossing vinden voor de homogene vergelijking

$$y^{(2)}(t) - y^{(1)}(t) - 6y(t) = 0$$

en we krijgen:

$$y_h(t) = Ae^{-2t} + Be^{3t}$$

Daarna proberen we een particuliere oplossing te vinden met een constante ingang $u(t) = 1$. We krijgen:

$$y_p(t) = \tfrac{1}{2}$$

De algemene oplossing is:

$$Ae^{-2t} + Be^{3t} + \tfrac{1}{2}$$

Uit $y(1) = 1$ en $y'(1) = 0$ krijgen we

$$Ae^{-2} + Be^{3} + \tfrac{1}{2} = 1$$

en

$$-2Ae^{-2} + 3Be^{3} = 0$$

We krijgen uit de tweede vergelijking $A = \tfrac{3}{2}e^{5}B$ en dus

$$\left(\tfrac{3}{2}e^{3} + e^{3}\right)B = \tfrac{1}{2}$$

en dus:

$$A = \tfrac{3}{10}e^{2}, \qquad B = \tfrac{1}{5}e^{-3}$$

Als we dit samenvoegen krijgen we:

$$\tfrac{3}{10}e^{-2(t-1)} + \tfrac{1}{5}e^{3(t-1)} + \tfrac{1}{2}$$