UNIVERSITEIT TWENTE
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Tentamen Signalen en Transformaties (156081) op maandag 29 oktober 2007, 9.00 – 12.00 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden.

---

1. Een 3-periodiek signaal $f(t)$ wordt op het interval $[-1, 2)$ gegeven door

$$f(t) = \begin{cases} 1 & -1 \le t < 0, \\ -1 & 0 \le t < 2. \end{cases}$$

   a) Toon aan dat het lijnenspectrum van f gelijk is aan

$$f_k = \begin{cases} \frac{i}{k\pi}\left(1 - e^{ik2\pi/3}\right) & k \neq 0, \\ -\frac{1}{3} & k = 0. \end{cases}$$

   b) Bepaal de reële Fourierreeks.

   c) Is de reële Fourierreeks overal gelijk aan de functie $f(t)$?

   d) Bereken het amplitudespectrum $|g_k|$ van het signaal $g(t) = f(t-1)$.

2. Van een ideaal laagdoorlatend filter wordt de frequentieresponsie $H(\omega)$ gegeven door

$$H(\omega) = \mathrm{trian}_\pi(\omega) e^{-i\omega t_0}.$$

   Hierin is $t_0 > 0$.

   a) Bepaal de impulsresponsie $h(t)$ van het systeem.

   Aan het systeem wordt een ingangssignaal

$$u(t) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}t)}{t}$$

   toegevoerd.

   Zij $y(t)$ de responsie van het systeem op het gegeven ingangssignaal $u(t)$.

   b) Schets het amplitudespectrum van $y(t)$ en bereken de energie-inhoud van dit signaal.

   c) Bereken de kruis spectrale dichtheid $S_{u,y}$ van u en y, d.w.z. de Fouriergetransformeerde van de kruiscorrelatie $\rho_{u,y}(t)$ van u en y waar:

$$\rho_{u,y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau + t) y^*(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

3. Bepaal de convolutie van $f(t) = \sin t$ en $g(t) = \mathrm{rect}_{2\pi}(t)$ op twee verschillende manieren.

z.o.z.

---

4. Gegeven is de differentaalvergelijking

$$y^{(1)}(t) + y(t) = u(t).$$

Verder is gegeven dat de ingang $u(t) = \sin(t), t \in \mathbb{R}$.

Drie vrienden waren tijdens het studeren aan het kijken hoe we de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking het beste kunnen bepalen. Ron beweert dat we dit kunnen doen met Fourierreeksen omdat de ingang $u(t)$ een periodieke functie is. Harry beweert daarentegen dat we dit beter kunnen doen met behulp van de Laplacetransformatie. Hermione vindt haar vrienden maar erg dom en beweert dat ze allebei ongelijk hebben.

Aan u de vraag om uit te zoeken wie gelijk heeft en waarom. Bovendien, willen we u vragen de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking te bepalen.

5. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$y^{(2)}(t) - y^{(1)}(t) - 6y(t) = u^{(1)}(t) - 3u(t). \tag{1}$$

a) Bepaal de impulsresponsie van (1).

b) Als ingang kiezen we $u(t) = 5\,\mathbb{1}(t)$. Bepaal alle begrensde oplossingen voor $t > 0$ van (1).

c) Gegeven $u(t) = 1$ voor $t > 1$ bepaal alle oplossingen van (1) voor $t > 1$ gegeven $y(1) = 1$ en $y'(1) = 0$.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk	1.	9 punten	Vraagstuk	3.	6 punten	Vraagstuk	5.	9 punten
Vraagstuk	2.	8 punten	Vraagstuk	4.	8 punten			

Het cijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen.

Formuleblad Signalen en Transformaties (156081)

<u>Integraaltransformaties</u>

<u>Tabel Fourier transformaties</u>

$$\boxed{F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt} \qquad \boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega}$$

$f(t)$	$F(\omega)$
$\operatorname{rect}_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } \lvert t\rvert < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{voor } \lvert t\rvert > \frac{a}{2} \end{cases} \quad a > 0$	$\frac{2\sin\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{\omega}$
$\operatorname{trian}_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{\lvert t\rvert}{a} & \text{voor } \lvert t\rvert < a \\ 0 & \text{voor } \lvert t\rvert > a \end{cases} \quad a > 0$	$\frac{4\sin^2\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{a\omega^2}$
$e^{-a\lvert t\rvert}, \ \operatorname{Re} a > 0$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
$\frac{t^n}{n!}e^{-at}\,\mathbb{1}(t), \ \operatorname{Re} a > 0, n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{(a+i\omega)^{n+1}}$
$e^{-at^2}, \ a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{\left(\frac{-\omega^2}{4a}\right)}$
$\delta(t)$	1
$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } t > 0 \\ 0 & \text{voor } t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\operatorname{sgn}(t)$	$\frac{2}{i\omega}$

Tabel Laplace transformaties

$$\boxed{F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt}$$ éénzijdige Laplace transformatie

$f(t)$	$F(s)$	conv. abscis
$e^{at}\,\mathbb{1}(t)$	$\frac{1}{s-a}$	$\operatorname{Re} a$
$\frac{t^n}{n!}e^{at}\,\mathbb{1}(t),\ \ n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{1}{(s-a)^{n+1}}$	$\operatorname{Re} a$
$\cos(bt)\,\mathbb{1}(t),\ \ b \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+b^2}$	0
$\sin(bt)\,\mathbb{1}(t),\ \ b \in \mathbb{R}$	$\frac{b}{s^2+b^2}$	0
$\delta(t)$	1	$-\infty$

Rekenregels

Fourierreeksen (periode T, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$)

$$\begin{aligned} f(t) &\longleftrightarrow f_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-ik\omega_0 t}\,dt \\ f(t-\tau) &\longleftrightarrow e^{-ik\omega_0\tau} f_k \\ e^{in\omega_0 t} f(t) &\longleftrightarrow f_{k-n} \qquad (n \text{ geheel}) \end{aligned}$$

Fourier transformatie

$$\begin{aligned} f(t) &\longleftrightarrow F(\omega) \\ f(t-t_0) &\longleftrightarrow e^{-i\omega t_0}F(\omega) \qquad (t_0 \in \mathbb{R}) \\ e^{i\omega_0 t} f(t) &\longleftrightarrow F(\omega-\omega_0) \qquad (\omega_0 \in \mathbb{R}) \\ f'(t) &\longleftrightarrow i\omega F(\omega) \\ F(t) &\longleftrightarrow 2\pi f(-\omega) \end{aligned}$$

Laplace transformatie

$$\begin{aligned} f(t) &\longleftrightarrow F(s) \\ f(t-t_0)\,\mathbb{1}(t-t_0) &\longleftrightarrow e^{-st_0}F(s) \qquad (t_0 \geq 0) \\ e^{s_0 t} f(t) &\longleftrightarrow F(s-s_0) \qquad (s_0 \in \mathbb{C}) \\ f'(t) &\longleftrightarrow sF(s) - f(0-) \end{aligned}$$