UNIVERSITEIT TWENTE
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Tentamen Signalen en Transformaties (156081) op maandag 21 januari 2008, 13.30 – 16.30 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden.

---

1. Zij $f(t)$ de 2π-periodieke functie die op $[-\pi, \pi)$ gegeven wordt door

   $$f(t) = \operatorname{sgn}(t)\sin(t)$$

   met

   $$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

   a) Toon aan dat deze functie ook π-periodiek is.
   b) Bereken de gegeneraliseerde afgeleide $f'(t)$ van $f(t)$.
   c) Bereken de reële Fourierreeks van $f(t)$.
   d) We kunnen de reële Fourierreeks van $f(t)$ berekenen als we uitgaan van een 2π periodieke functie maar ook als we uitgaan van een π-periodieke functie. Kunt u beargumenteren of dit verschillende of gelijke antwoorden op zal leveren?
   e) Bepaal het vermogen van f.

2. Voor een filter wordt de impulsresponsie $h(t)$ gegeven door

   $$h(t) = e^{(3i+1)t}\,\mathbb{1}(-t) + e^{(2i-4)t}\,\mathbb{1}(t) + \delta(t).$$

   a) Bepaal de frequentieresponsie van het systeem.

   Zij u het 1-periodieke signaal met het volgende lijnenspectrum (ook wel Fouriercoëfficienten genoemd):

   $$u_k = \begin{cases} 1 & |k| \le 1 \\ 0 & |k| \ge 2 \end{cases}$$

   b) Bereken de responsie $y(t)$.
   c) Bereken de responsie $\tilde{y}(t)$ voor de ingang $\tilde{u}(t) = u(t - \frac{1}{2})$.

3. Bepaal de convolutie van $f(t) = te^{-t+1}\,\mathbb{1}(t)$ en $g(t) = \operatorname{sgn}(2t+1)$ op twee verschillende manieren.

z.o.z.

---

4. Vier studenten zijn aan het studeren. Volgens Harry kun je aan de gegeneraliseerde afgeleide van een functie zien of de functie zelf continue is. Viktor is het hiermee eens omdat de gegeneraliseerde afgeleide van een continue functie zelf weer continu is. Fleur vindt dit onzin omdat een functie continu moet zijn wil de gegeneraliseerde afgeleide bestaan. Cedric houdt zich altijd afzijdig maar wil dit keer toch opmerken dat ze allemaal ongelijk hebben.

   Geef vooe elk van de studenten aan of ze gelijk dan wel ongelijk hebben en waarom.

5. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$y^{(2)}(t) + 2y^{(1)}(t) + y(t) = u^{(1)}(t) + u(t). \tag{1}$$

   a) Bepaal de impulsresponsie van (1).
   b) Als ingang kiezen we $u(t) = \delta(t)$. Bepaal de oplossing voor $t > 0$ van (1) met $y(0^-) = 2$ en $y'(0^-) = 1$.
   c) Bepaal de stapresponsie van (1). Dat wil zeggen, bepaal de oplossing van (1) met $u(t) = \mathbb{1}(t)$ en $y(0^-) = 0$ en $y'(0^-) = 0$.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk	1.	12 punten	Vraagstuk	3.	8 punten	Vraagstuk	5.	12 punten
Vraagstuk	2.	12 punten	Vraagstuk	4.	10 punten			

Het cijfer wordt bepaald door bij het totaal der behaalde punten 6 punten op te tellen en dan door 6 te delen.

Formuleblad Signalen en Transformaties (156081)

INTEGRAALTRANSFORMATIES

Tabel Fourier transformaties

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

$f(t)$	$F(\omega)$
$\text{rect}_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } \lvert t\rvert < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{voor } \lvert t\rvert > \frac{a}{2} \end{cases} \quad a > 0$	$\frac{2\sin\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{\omega}$
$\text{trian}_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{\lvert t\rvert}{a} & \text{voor } \lvert t\rvert < a \\ 0 & \text{voor } \lvert t\rvert > a \end{cases} \quad a > 0$	$\frac{4\sin^2\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{a\omega^2}$
$e^{-a\lvert t\rvert}, \;\; \text{Re}\, a > 0$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
$\frac{t^n}{n!}e^{-at}\,\mathbb{1}(t), \;\; \text{Re}\, a > 0, n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{(a+i\omega)^{n+1}}$
$e^{-at^2}, \;\; a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\left(\frac{-\omega^2}{4a}\right)}$
$\delta(t)$	1
$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } t > 0 \\ 0 & \text{voor } t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{i\omega}$

Tabel Laplace transformaties

$$\boxed{F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt}$$ éénzijdige Laplace transformatie

$f(t)$	$F(s)$	conv. abscis
$e^{at}\,\mathbb{1}(t)$	$\frac{1}{s-a}$	$\mathrm{Re}\,a$
$\frac{t^n}{n!}e^{at}\,\mathbb{1}(t),\ \ n=0,1,2,\ldots$	$\frac{1}{(s-a)^{n+1}}$	$\mathrm{Re}\,a$
$\cos(bt)\,\mathbb{1}(t),\ \ b\in\mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+b^2}$	0
$\sin(bt)\,\mathbb{1}(t),\ \ b\in\mathbb{R}$	$\frac{b}{s^2+b^2}$	0
$\delta(t)$	1	$-\infty$

Rekenregels

Fourierreeksen (periode T, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$)

$$\begin{aligned}
f(t) &\longleftrightarrow f_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-ik\omega_0 t}\,dt\\
f(t-\tau) &\longleftrightarrow e^{-ik\omega_0\tau} f_k\\
e^{in\omega_0 t}f(t) &\longleftrightarrow f_{k-n} \qquad (n \text{ geheel})
\end{aligned}$$

Fourier transformatie

$$\begin{aligned}
f(t) &\longleftrightarrow F(\omega)\\
f(t-t_0) &\longleftrightarrow e^{-i\omega t_0}F(\omega) \qquad (t_0\in\mathbb{R})\\
e^{i\omega_0 t}f(t) &\longleftrightarrow F(\omega-\omega_0) \qquad (\omega_0\in\mathbb{R})\\
f'(t) &\longleftrightarrow i\omega F(\omega)\\
F(t) &\longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)
\end{aligned}$$

Laplace transformatie

$$\begin{aligned}
f(t) &\longleftrightarrow F(s)\\
f(t-t_0)\,\mathbb{1}(t-t_0) &\longleftrightarrow e^{-st_0}F(s) \qquad (t_0\geq 0)\\
e^{s_0 t}f(t) &\longleftrightarrow F(s-s_0) \qquad (s_0\in\mathbb{C})\\
f'(t) &\longleftrightarrow sF(s) - f(0^-)
\end{aligned}$$