UNIVERSITEIT TWENTE
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Tentamen Signalen en Transformaties (156081) op maandag 27 oktober 2008, 9.00 – 12.00 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden.

---

1. Zij $f(t)$ de 2-periodieke functie die op $[-1, 1)$ gegeven wordt door

$$f(t) = e^{|t|}$$

   a) Toon aan dat de complexe Fourierreeks gelijk is aan:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k e - 1}{1 + k^2\pi^2} e^{ik\pi t}$$

   b) Bereken de reële Fourierreeks van $f(t)$.

   c) Bereken de gegeneraliseerde afgeleide $f'(t)$ van $f(t)$.

   d) Bepaal het vermogen van f.

2. Voor een filter wordt de frequentieresponsie $H(\omega)$ gegeven door

$$H(\omega) = \mathrm{rect}_2(2\omega + 1)$$

   a) Teken $H(\omega)$ en beargumenteer waarom de impulsresponsie geen reëel signaal zal zijn.

   b) Bepaal de impulsresponsie van het systeem.

   Aan het systeem wordt een ingangssignaal

$$u(t) = \frac{t\cos(\frac{1}{4}t) + 2\sin(\frac{1}{2}t)}{t}$$

   toegevoerd.

   Zij $y(t)$ de responsie van het systeem op het gegeven ingangssignaal $u(t)$.

   c) Toon aan dat $y(t)$ bandbegrensd is en bepaal een conditie op de bemonsteringsperiode die garandeert dat $y(t)$ exact reconstrueerbaar is uit een bemonstering.

   d) Bereken de responsie $y(t)$.

3. Bepaal de convolutie van $f(t) = \sin(t)\,\mathbb{1}(t)$ en $g(t) = e^{-t}\,\mathbb{1}(t)$ op twee verschillende manieren.

z.o.z.

---

4. Drie professoren zijn hun college aan het voorbereiden. Volgens professor Lupin bevat de Fourier getransformeerde van een periodieke functie altijd oneindig veel delta-functies. Volgens professor Flitwick bevat de Fourier getransformeerde van een niet absoluut integreerbare functie altijd delta-functies. Professor McGonagall is het hier niet mee eens; het moet omgekeerd worden: als een functie absoluut integreerbaar is dan bevat de Fouriergetransformeerde geen delta-functies.

   Geef voor elk van de professoren aan of ze gelijk dan wel ongelijk hebben en waarom.

5. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$y^{(3)}(t) + 2y^{(2)}(t) + y^{(1)}(t) = u^{(1)}(t) - u(t). \tag{1}$$

   a) Bepaal de impulsresponsie van (1).
   b) Bepaal de stapresponsie van (1).
   c) Als ingang kiezen we $u(t) = \mathbb{1}(t)$. Bepaal de oplossing voor $t > 0$ van (1) met $y(0^-) = 2$, $y'(0^-) = 2$ en $y''(0^-) = 1$.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk	1.	12 punten	Vraagstuk	3.	8 punten	Vraagstuk	5.	12 punten
Vraagstuk	2.	12 punten	Vraagstuk	4.	10 punten			

Het cijfer wordt bepaald door bij het totaal der behaalde punten 6 punten op te tellen en dan door 6 te delen.

Formuleblad Signalen en Transformaties (156081)

INTEGRAALTRANSFORMATIES

Tabel Fourier transformaties

$$\boxed{F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt} \qquad \boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega}$$

$f(t)$	$F(\omega)$
$\mathrm{rect}_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } \lvert t\rvert < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{voor } \lvert t\rvert > \frac{a}{2} \end{cases} \quad a > 0$	$\frac{2\sin\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{\omega}$
$\mathrm{trian}_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{\lvert t\rvert}{a} & \text{voor } \lvert t\rvert < a \\ 0 & \text{voor } \lvert t\rvert > a \end{cases} \quad a > 0$	$\frac{4\sin^2\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{a\omega^2}$
$e^{-a\lvert t\rvert}, \ \mathrm{Re}\, a > 0$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
$\frac{t^n}{n!}e^{-at}\,\mathbb{1}(t), \ \mathrm{Re}\, a > 0, n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{(a+i\omega)^{n+1}}$
$e^{-at^2}, \ a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\left(\frac{-\omega^2}{4a}\right)}$
$\delta(t)$	1
$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } t > 0 \\ 0 & \text{voor } t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{2}{i\omega}$

Tabel Laplace transformaties

$$\boxed{F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt}$$ éénzijdige Laplace transformatie

$f(t)$	$F(s)$	conv. abscis
$e^{at}\,\mathbb{1}(t)$	$\frac{1}{s-a}$	$\operatorname{Re} a$
$\frac{t^n}{n!}e^{at}\,\mathbb{1}(t),\ \ n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{(s-a)^{n+1}}$	$\operatorname{Re} a$
$\cos(bt)\,\mathbb{1}(t),\ \ b \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+b^2}$	0
$\sin(bt)\,\mathbb{1}(t),\ \ b \in \mathbb{R}$	$\frac{b}{s^2+b^2}$	0
$\delta(t)$	1	$-\infty$

Rekenregels

Fourierreeksen (periode T, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$)

$$\begin{aligned}
f(t) &\longleftrightarrow f_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-ik\omega_0 t}\,dt \\
f(t-\tau) &\longleftrightarrow e^{-ik\omega_0\tau} f_k \\
e^{in\omega_0 t} f(t) &\longleftrightarrow f_{k-n} \qquad (n \text{ geheel})
\end{aligned}$$

Fourier transformatie

$$\begin{aligned}
f(t) &\longleftrightarrow F(\omega) \\
f(t-t_0) &\longleftrightarrow e^{-i\omega t_0}F(\omega) \qquad (t_0 \in \mathbb{R}) \\
e^{i\omega_0 t} f(t) &\longleftrightarrow F(\omega-\omega_0) \qquad (\omega_0 \in \mathbb{R}) \\
f'(t) &\longleftrightarrow i\omega F(\omega) \\
F(t) &\longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)
\end{aligned}$$

Laplace transformatie

$$\begin{aligned}
f(t) &\longleftrightarrow F(s) \\
f(t-t_0)\,\mathbb{1}(t-t_0) &\longleftrightarrow e^{-st_0}F(s) \qquad (t_0 \geq 0) \\
e^{s_0 t} f(t) &\longleftrightarrow F(s-s_0) \qquad (s_0 \in \mathbb{C}) \\
f'(t) &\longleftrightarrow sF(s) - f(0^-)
\end{aligned}$$