UNIVERSITEIT TWENTE
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Uitwerking tentamen Signalen en Transformaties (156081) op maandag 19 januari 2009, 13.30 – 16.30 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!

1.

Zij $f(t)$ de 2-periodieke functie die op $[0,2)$ gegeven wordt door

$$f(t) = t\,\mathrm{sgn}(t-1)$$

a) Bereken de gegeneraliseerde afgeleide $f'(t)$ van $f(t)$.

Deze functie heeft een aantal mogelijke discontinuïteiten. In 1 zal de sgn functie voor een sprong zorgen van -1 naar 1. In 0 zit ook een sprong door de periodieke voortzetting omdat $f(0-) = f(2-) = 2$ terwijl $f(0) = 0$. De functie springt dus van 2 naar 0. Omdat de functie 2-periodiek is, leveren discontinuïteiten in 0 en 1 ook discontinuiteiten in alle punten die een veelvoud van 2 van deze punten verwijderd liggen!

Voor $t \in (0,1)$ vinden we:

$$f(t) = -t \quad \Rightarrow \quad f'(t) = -1$$

Voor $t \in (1,2)$ vinden we:

$$f(t) = t \quad \Rightarrow \quad f'(t) = 1$$

Daarnaast hebben we nog δ-pulsen in 0 en 1 vanwege de discontinuïteiten. Dus voor $t \in (0-, 2-)$ geldt:

$$f'(t) = \mathrm{sgn}(t-1) - 2\delta(t) + 2\delta(t-1)$$

en dit moet 2-periodiek worden voortgezet.

b) Toon aan dat het lijnenspectrum gelijk is aan:

$$f_k = \begin{cases} 0 & k \text{ even}, k \neq 0 \\ \frac{1}{2} & k = 0 \\ \frac{2(1+ik\pi)}{k^2\pi^2} & \text{anders} \end{cases}$$

In ons geval geldt dat $\omega_0 = \pi$ en

$$f_k = \frac{1}{2}\int_0^2 t\,\mathrm{sgn}(t-1)e^{-ik\pi t}\,\mathrm{d}t$$

Deze integraal kunnen we het makkelijkste uitrekenen door het te splitsen in twee integratiegebieden:

$$f_k = \frac{1}{2}\int_0^1 -te^{-ik\pi t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_1^2 te^{-ik\pi t}\,\mathrm{d}t$$

We krijgen voor $k \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^1 -te^{-ik\pi t}\,\mathrm{d}t &= \left[\tfrac{1}{2ik\pi}te^{-ik\pi t}\right]_0^1 - \int_0^1 \tfrac{1}{2ik\pi}e^{-ik\pi t}\,\mathrm{d}t \\
&= \tfrac{1}{2ik\pi}e^{-ik\pi} + \left[\tfrac{1}{2(ik\pi)^2}e^{-ik\pi t}\right]_0^1 \\
&= \tfrac{1}{2ik\pi}e^{-ik\pi} - \tfrac{1}{2(k\pi)^2}\left(e^{-ik\pi}-1\right) \\
&= \tfrac{1}{2ik\pi}(-1)^k - \tfrac{1}{2(k\pi)^2}\left((-1)^k-1\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_1^2 te^{-ik\pi t}\,\mathrm{d}t &= \left[\tfrac{-1}{2ik\pi}te^{-ik\pi t}\right]_1^2 + \int_1^2 \tfrac{1}{2ik\pi}e^{-ik\pi t}\,\mathrm{d}t \\
&= \tfrac{-1}{2ik\pi}\left(2e^{-2ik\pi}-e^{-ik\pi}\right) - \left[\tfrac{1}{2(ik\pi)^2}e^{-ik\pi t}\right]_1^2 \\
&= \tfrac{1}{2ik\pi}\left(e^{-ik\pi}-2\right) + \tfrac{1}{2(k\pi)^2}\left(e^{-2ik\pi}-e^{-ik\pi}\right) \\
&= \tfrac{1}{2ik\pi}\left((-1)^k-2\right) - \tfrac{1}{2(k\pi)^2}\left((-1)^k-1\right)
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$f_k = \left[\tfrac{1}{ik\pi} - \tfrac{1}{(k\pi)^2}\right]\left((-1)^k-1\right)$$

Dit levert duidelijk nul op als k even is en als k oneven dan krijgen we:

$$f_k = -2\left[\tfrac{1}{ik\pi} - \tfrac{1}{(k\pi)^2}\right] = \frac{2(1+ik\pi)}{k^2\pi^2}$$

We moeten alleen het geval $k = 0$ nog onderzoeken en we krijgen:

$$\begin{aligned}
f_0 &= \frac{1}{2}\int_0^1 -t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_1^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\tfrac{-1}{4}t^2\right]_0^1 + \left[\tfrac{1}{4}t^2\right]_1^2 \\
&= \tfrac{-1}{4} + \tfrac{3}{4} = \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

b) Bereken de reële Fourierreeks van $f(t)$.

We weten dat de reële Fourierreeks van $f(t)$ wordt gegeven door:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(k\omega_0 t) + b_k\sin(k\omega_0 t).$$

In ons geval geldt dat $\omega_0 = \pi$ en $2f_k = a_k - ib_k$ waarbij we de f_k al bij onderdeel (1b) hebben berekend. Hieruit volgt:

$$a_k = \begin{cases} 0 & k \text{ even}, k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \\ \frac{4}{k^2\pi^2} & \text{anders} \end{cases}$$

en

$$b_k = \begin{cases} 0 & k \text{ even} \\ \frac{-4}{k\pi} & \text{anders} \end{cases}$$

De reële Fourierreeks van $f(t)$ is dus gelijk aan:

$$\tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\pi t) + b_k \sin(k\pi t).$$

of

$$\tfrac{1}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{(2m+1)^2\pi^2} \cos((2m+1)\pi t) - \frac{4}{(2m+1)\pi} \sin((2m+1)\pi t).$$

waarbij we $k = 2m + 1$ gekozen hebben omdat de even termen toch geen bijdrage leveren.

d) Bepaal het vermogen van f.

Dit kan het makkelijkste in het tijddomein:

$$P_f = \frac{1}{2}\int_0^2 |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$

dus

$$\begin{aligned} P_f &= \frac{1}{2}\int_0^2 t^2 \, \mathrm{d}t \\ &= \left[\tfrac{1}{6}t^3\right]_0^2 \\ &= \tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

2.

Voor een filter wordt de frequentieresponsie $\hat{h}(\omega)$ gegeven door

$$\hat{h}(\omega) = e^{-i\omega} i\omega\sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4}$$

a) Bepaal de impulsresponsie van het systeem.

We hebben:

$$\begin{aligned} e^{-t^2} &\longleftrightarrow \sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4} \\ -2te^{-t^2} &\longleftrightarrow i\omega\sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4} \\ -2(t-1)e^{-(t-1)^2} &\longleftrightarrow e^{-i\omega} i\omega\sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4} \end{aligned}$$

Aan het systeem wordt een ingangssignaal

$$u(t) = 1 + \cos(2t)$$

toegevoerd. Zij $y(t)$ de responsie van het systeem op het gegeven ingangssignaal $u(t)$.

b) Bereken de responsie $y(t)$ en toon aan dat $y(t)$ een reëel signaal is.

$u(t)$ is een periodiek signaal. Als $u(t)$ een periodiek signaal is met Fourierreeks:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k e^{-ik\omega_0 t}$$

dan hebben we:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{h}(k\omega_0) u_k e^{-ik\omega_0 t}$$

In ons geval,

$$u(t) = 1 + \tfrac{1}{2}e^{-2it} + \tfrac{1}{2}e^{2it}$$

en dus:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \hat{h}(0) + \tfrac{1}{2}\hat{h}(-2)e^{-2it} + \tfrac{1}{2}\hat{h}(2)e^{2it} \\
&= \tfrac{1}{2}e^{2i}(-2i)e^{-1}e^{-2it} + \tfrac{1}{2}e^{-2i}(2i)e^{-1}e^{2it} \\
&= e^{-1}i\left[-e^{-2it+2i} + e^{2it-2i}\right] \\
&= -2e^{-1}\sin(2t-2)
\end{aligned}$$

3.

$\boxed{\text{Bepaal de convolutie van } f(t) = e^{-t}\,\mathbb{1}(t) \text{ en } g(t) = e^{-2t}\,\mathbb{1}(t) \text{ op twee verschillende manieren.}}$

We hebben:

$$\begin{aligned}
(f \star g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)}\,\mathbb{1}(t-\tau)e^{-2\tau}\,\mathbb{1}(\tau)\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

Dit levert 0 op voor $t < 0$ terwijl we voor $t > 0$ hebben:

$$\begin{aligned}
(f \star g)(t) &= \int_0^t e^{-(t-\tau)}e^{-2\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^t e^{-t-\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \left[-e^{-t-\tau}\right]_{\tau=0}^{t} \\
&= e^{-t} - e^{-2t}
\end{aligned}$$

Dit was alleen voor $t > 0$. Samen met het feit dat voor $t < 0$ de convolutie gelijk is aan nul krijgen we:

$$\left(e^{-t} - e^{-2t}\right)\mathbb{1}(t)$$

Omdat we met causale signalen werken, kunnen we heel goed met de Laplace transformatie uit de voeten.

De Laplacegetransformeerde van $f(t)$ is gelijk aan:

$$F(s) = \frac{1}{s+1}$$

terwijl de Laplacegetransformeerde van $g(t)$ gelijk is aan:

$$G(s) = \frac{1}{s+2}$$

maar dan is de Laplacegetransformeerde van $(f \star g)(t)$ gelijk aan:

$$F(s)G(s) = \frac{1}{s+2}\frac{1}{s+1}$$

Voor de inverse Laplacetransformatie gaan we eerst breuksplitsen

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

We krijgen

$$A(s+2) + B(s+1) = 1$$

en voor $s = -1$ krijgen we $A = 1$. Aan de andere kant, $s = -2$ levert op $B = -1$. We hebben dus

$$F(s)G(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{2s+1}$$

Nu gaan we de inverse Laplacetransformatie toepassen:

$$\left(e^{-t} - e^{-2t}\right)\mathbb{1}(t)$$

4.

Drie studenten zijn het college aan het nabespreken. Volgens Hermione is zowel de afgeleide als de primitieve van een bandbegrensd signaal nog steeds bandbegrensd. Volgens Ron geldt voor een filter van de vorm:

$$y^{(2)}(t) + y^{(1)}(t) + y(t) = q_1 u^{(1)}(t) + q_0 u(t)$$

dat $y(t)$ bandbegrensd is als $u(t)$ bandbegrensd is. Harry denkt dat dit niet altijd waar is. Het hangt volgens Harry af van welke oplossing van de differentiaalvergelijking we kiezen.
Geef voor elk van de studenten aan of ze gelijk dan wel ongelijk hebben en waarom.

Voor een bandbegrensd signaal $u(t)$ geldt dat de Fouriergetransformeerde $\hat{u}(\omega)$ de eigenschap heeft dat

$$\hat{u}(\omega) = 0 \qquad |\omega| > \omega_b$$

voor zekere ω_b. De afgeleide van u heeft als Fouriergetransformeerde $i\omega\hat{u}(\omega)$ en daarvoor geldt dan natuurlijk ook dat $i\omega\hat{u}(\omega) = 0$ voor all $|\omega| > \omega_b$. Een primitieve van u heeft als Fouriergetransformeerde:

$$\frac{1}{i\omega}\hat{u}(\omega) + c\delta(\omega)$$

waarbij de constante c bepaald wordt door de integratieconstante (de primitieve is uniek op een constante na). Deze Fouriergetransformeerde is natuurlijk ook weer 0 voor alle $|\omega| > \omega_b$. Hermione heeft dus duidelijk gelijk.

Ron is niet erg duidelijk. De oplossing van een differentiaalvergelijking is niet uniek. De vergelijking heeft meerdere oplossingen. Als Ron de unieke oplossing $y(t)$ bedoelt die

Fouriertransformeerbaar is dan heeft hij gelijk want de differentiaalvergelijking kunnen we dan Fouriertransformeren:

$$\left[(i\omega)^2 + (i\omega) + 1\right] \hat{y}(\omega) = [q_1(i\omega) + q_0]\,\hat{u}(\omega)$$

of

$$\hat{y}(\omega) = \frac{q_1(i\omega) + q_0}{(i\omega)^2 + (i\omega) + 1}\hat{u}(\omega)$$

en dat is dan natuurlijk weer gelijk aan 0 voor alle $|\omega| > \omega_b$. Maar Harry merkt terecht op dat voor andere oplossingen dit argument niet op gaat. Voor andere oplossingen is echter het probleem dat we niet kunnen Fouriertransformeren en dan kun je natuurlijk niet van een bandbegrensd signaal spreken.

5.

Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$y^{(2)}(t) + y^{(1)}(t) - 2y(t) = u^{(1)}(t) - 2u(t). \tag{1}$$

a) Bepaal de impulsresponsie van (1).

We hebben omdat alle begincondities nul zijn

$$s^2Y(s) + sY(s) - 2Y(s) = sU(s) - 2U(s)$$

en dus:

$$Y(s) = \frac{s-2}{s^2+s-2}U(s)$$

We vinden de impulsresponsie door de inverse Laplace transformatie los te laten op de overdrachtsfunctie

$$H(s) = \frac{s-2}{s^2+s-2}$$

We gaan eerst breuksplitsen:

$$H(s) = \frac{s-2}{(s+2)(s-1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-1}$$

Voor de constanten moet gelden:

$$A(s-1) + B(s+2) = s-2$$

Voor $s = 1$ krijgen we $B = -1/3$; voor $s = -2$ krijgen we $A = 4/3$. We krijgen dan de impulsresponsie:

$$h(t) = \tfrac{4}{3}e^{-2t}\,\mathbb{1}(t) - \tfrac{1}{3}e^{t}\,\mathbb{1}(t)$$

b) Als ingang kiezen we $u(t) = \mathbb{1}(t)$. Bepaal de oplossing voor $t > 0$ van (1) met $y(0^-) = 2$ en $y'(0^-) = 2$.

Als de begincondities niet nul zijn krijgen we:

$$\begin{aligned} y^{(1)}(t) &\longleftrightarrow sY(s) - y(0^-) = sY(s) - 2 \\ y^{(2)}(t) &\longleftrightarrow s(sY(s) - 2) - y'(0^-) = s^2Y(s) - 2s - 2 \end{aligned}$$

We krijgen:

$$(s^2 + s - 2)Y(s) - 2s - 2 - 2 = (s - 2)U(s)$$

en dus

$$(s^2 + s - 2)Y(s) = 2s + 4 + (s - 2)U(s)$$

Omdat $u(t) = \mathbb{1}(t)$ krijgen we $U(s) = \frac{1}{s}$ en

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2s + 4}{(s + 2)(s - 1)} + \frac{s - 2}{s(s + 2)(s - 1)} \\ &= \frac{2}{s - 1} + \frac{s - 2}{s(s + 2)(s - 1)} \end{aligned}$$

Om de tweede term uit te rekenen moeten we weer breuksplitsen:

$$\frac{s - 2}{s(s - 1)(s + 2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - 1} + \frac{C}{s + 2}$$

Voor de constanten moet gelden:

$$A(s - 1)(s + 2) + Bs(s + 2) + Cs(s - 1) = s - 2$$

Voor $s = 1$ krijgen we $B = -1/3$; voor $s = 0$ krijgen we $A = 1$ en tot slot krijgen we voor $s = -2$ krijgen we $C = -2/3$. We vinden:

$$\mathbb{1}(t) + \tfrac{5}{3}e^{t}\,\mathbb{1}(t) - \tfrac{2}{3}e^{-2t}\,\mathbb{1}(t) \longleftrightarrow \frac{2}{s - 1} + \frac{s - 2}{s(s + 2)(s - 1)}$$

Dat levert op voor $t > 0$:

$$y(t) = 1 + \tfrac{5}{3}e^{t} - \tfrac{2}{3}e^{-2t}$$

b) Als ingang kiezen we $u(t) = \mathbb{1}(t - 1)$. Bepaal de oplossing voor $t > 1$ van (1) met $y(1^-) = 2$ en $y'(1^-) = 2$.

We verschuiven de ingang met 1 tijdseenheid vergeleken met onderdeel 5b. Dit betekent dat de bijbehorende y meeschuift en we krijgen dus:

$$y(t) = 1 + \tfrac{5}{3}e^{t-1} - \tfrac{2}{3}e^{-2(t-1)}$$