UNIVERSITEIT TWENTE
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Tentamen Signalen en Transformaties (156081) op maandag 19 januari 2009, 13.30 – 16.30 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!

---

1. Zij $f(t)$ de 2-periodieke functie die op $[0, 2)$ gegeven wordt door

   $$f(t) = t\,\mathrm{sgn}(t-1)$$

   a) Bereken de gegeneraliseerde afgeleide $f'(t)$ van $f(t)$.

   b) Toon aan dat het lijnenspectrum gelijk is aan:

   $$f_k = \begin{cases} 0 & k \text{ even}, k \neq 0 \\ \frac{1}{2} & k = 0 \\ \frac{2(1+ik\pi)}{k^2\pi^2} & \text{anders} \end{cases}$$

   c) Bereken de reële Fourierreeks van $f(t)$.

   d) Bepaal het vermogen van f.

2. Voor een filter wordt de frequentieresponsie $\hat{h}(\omega)$ gegeven door

   $$\hat{h}(\omega) = e^{-i\omega} i\omega\sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4}$$

   a) Bepaal de impulsresponsie van het systeem.

   Aan het systeem wordt een ingangssignaal

   $$u(t) = 1 + \cos(2t)$$

   toegevoerd. Zij $y(t)$ de responsie van het systeem op het gegeven ingangssignaal $u(t)$.

   b) Bereken de responsie $y(t)$ en toon aan dat $y(t)$ een reëel signaal is.

3. Bepaal de convolutie van $f(t) = e^{-t}\,\mathbb{1}(t)$ en $g(t) = e^{-2t}\,\mathbb{1}(t)$ op twee verschillende manieren.

z.o.z.

---

4. Drie studenten zijn het college aan het nabespreken. Volgens Hermione is zowel de afgeleide als de primitieve van een bandbegrensd signaal nog steeds bandbegrensd. Volgens Ron geldt voor een filter van de vorm:

$$y^{(2)}(t) + y^{(1)}(t) + y(t) = q_1 u^{(1)}(t) + q_0 u(t)$$

dat $y(t)$ bandbegrensd is als $u(t)$ bandbegrensd is. Harry denkt dat dit niet altijd waar is. Het hangt volgens Harry af van welke oplossing van de differentiaalvergelijking we kiezen.

Geef voor elk van de studenten aan of ze gelijk dan wel ongelijk hebben en waarom.

5. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$y^{(2)}(t) + y^{(1)}(t) - 2y(t) = u^{(1)}(t) - 2u(t). \tag{1}$$

a) Bepaal de impulsresponsie van (1).

b) Als ingang kiezen we $u(t) = \mathbb{1}(t)$. Bepaal de oplossing voor $t > 0$ van (1) met $y(0^-) = 2$ en $y'(0^-) = 2$.

c) Als ingang kiezen we $u(t) = \mathbb{1}(t-1)$. Bepaal de oplossing voor $t > 1$ van (1) met $y(1^-) = 2$ en $y'(1^-) = 2$.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk	1.	12 punten	Vraagstuk	3.	8 punten	Vraagstuk	5.	12 punten
Vraagstuk	2.	12 punten	Vraagstuk	4.	10 punten			

Het cijfer wordt bepaald door bij het totaal der behaalde punten 6 punten op te tellen en dan door 6 te delen.

Formuleblad Signalen en Transformaties (156081)

Integraaltransformaties

Tabel Fourier transformaties

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt} \qquad \boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega}$$

$f(t)$	$\hat{f}(\omega)$
$\mathrm{rect}_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } \lvert t\rvert < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{voor } \lvert t\rvert > \frac{a}{2} \end{cases} \quad a > 0$	$\frac{2\sin\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{\omega}$
$\mathrm{trian}_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{\lvert t\rvert}{a} & \text{voor } \lvert t\rvert < a \\ 0 & \text{voor } \lvert t\rvert > a \end{cases} \quad a > 0$	$\frac{4\sin^2\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{a\omega^2}$
$e^{-a\lvert t\rvert}$, $\mathrm{Re}\, a > 0$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
$\frac{t^n}{n!}e^{-at}\,\mathbb{1}(t)$, $\mathrm{Re}\, a > 0, n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{(a+i\omega)^{n+1}}$
e^{-at^2}, $a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\left(\frac{-\omega^2}{4a}\right)}$
$\delta(t)$	1
$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } t > 0 \\ 0 & \text{voor } t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{2}{i\omega}$

Tabel Laplace transformaties

$$\boxed{F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt}$$ éénzijdige Laplace transformatie

$f(t)$	$F(s)$	conv. abscis
$e^{at}\,\mathbb{1}(t)$	$\frac{1}{s-a}$	$\mathrm{Re}\,a$
$\frac{t^n}{n!}e^{at}\,\mathbb{1}(t),\quad n=0,1,2,\ldots$	$\frac{1}{(s-a)^{n+1}}$	$\mathrm{Re}\,a$
$\cos(bt)\,\mathbb{1}(t),\quad b\in\mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+b^2}$	0
$\sin(bt)\,\mathbb{1}(t),\quad b\in\mathbb{R}$	$\frac{b}{s^2+b^2}$	0
$\delta(t)$	1	$-\infty$

Rekenregels

Fourierreeksen (periode T, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$)

$$\begin{aligned}
f(t) &\longleftrightarrow f_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-ik\omega_0 t}\,dt \\
f(t-\tau) &\longleftrightarrow e^{-ik\omega_0\tau} f_k \\
e^{in\omega_0 t} f(t) &\longleftrightarrow f_{k-n} \qquad (n \text{ geheel})
\end{aligned}$$

Fourier transformatie

$$\begin{aligned}
f(t) &\longleftrightarrow \hat{f}(\omega) \\
f(t-t_0) &\longleftrightarrow e^{-i\omega t_0}\hat{f}(\omega) \qquad (t_0\in\mathbb{R}) \\
e^{i\omega_0 t} f(t) &\longleftrightarrow \hat{f}(\omega-\omega_0) \qquad (\omega_0\in\mathbb{R}) \\
f'(t) &\longleftrightarrow i\omega\hat{f}(\omega) \\
\hat{f}(t) &\longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)
\end{aligned}$$

Laplace transformatie

$$\begin{aligned}
f(t) &\longleftrightarrow F(s) \\
f(t-t_0)\,\mathbb{1}(t-t_0) &\longleftrightarrow e^{-st_0}F(s) \qquad (t_0\geq 0) \\
e^{s_0 t} f(t) &\longleftrightarrow F(s-s_0) \qquad (s_0\in\mathbb{C}) \\
f'(t) &\longleftrightarrow sF(s) - f(0^-)
\end{aligned}$$