UNIVERSITEIT TWENTE
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Uitwerking tentamen Signalen en Transformaties (156081) op maandag 27 oktober 2008, 9.00 – 12.00 uur

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!

1.

Zij $f(t)$ de 2-periodieke functie die op $[-1,1)$ gegeven wordt door

$$f(t) = e^{|t|}$$

a) Toon aan dat de complexe Fourierreeks gelijk is aan:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k e - 1}{1 + k^2\pi^2} e^{ik\pi t}$$

b) Bereken de reële Fourierreeks van $f(t)$.

We weten dat de complexe Fourierreeks van $f(t)$ wordt gegeven door:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ik\omega_0 t}.$$

In ons geval geldt dat $\omega_0 = \pi$ en

$$f_k = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{|t|} e^{-ik\pi t}\,\mathrm{d}t$$

Deze integraal kunnen we het makkelijkste uitrekenen door het te splitsen in twee integratiegebieden:

$$f_k = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} e^{-t} e^{-ik\pi t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} e^{t} e^{-ik\pi t}\,\mathrm{d}t$$

We krijgen:

$$\begin{aligned}
f_k &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} e^{-(1+ik\pi)t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} e^{(1-ik\pi)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1+ik\pi} e^{-(1+ik\pi)t}\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-ik\pi} e^{(1-ik\pi)t}\right]_{0}^{1} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1+ik\pi}\left(1 - e^{1+ik\pi}\right) + \frac{1}{1-ik\pi}\left(e^{1-ik\pi} - 1\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1+ik\pi}\left(1 - e(-1)^k\right) + \frac{1}{1-ik\pi}\left(e(-1)^k - 1\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+ik\pi} + \frac{1}{1-ik\pi}\right]\left(e(-1)^k - 1\right) \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{1-ik\pi+1+ik\pi}{1+k^2\pi^2}\left(e(-1)^k - 1\right) \\
&= \frac{1}{1+k^2\pi^2}\left(e(-1)^k - 1\right)
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat de complexe Fourierreeks van $f(t)$ gelijk is aan:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k e - 1}{1 + k^2\pi^2} e^{ik\pi t}$$

b) Bereken de reële Fourierreeks van $f(t)$.

We weten dat de reële Fourierreeks van $f(t)$ wordt gegeven door:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t).$$

In ons geval geldt dat $\omega_0 = \pi$ en $2f_k = a_k - ib_k$ waarbij we de f_k al bij onderdeel (1a) hebben berekend. Hieruit volgt:

$$a_k = \frac{2}{1 + k^2\pi^2} \left(e(-1)^k - 1 \right), \qquad b_k = 0$$

en de reële Fourierreeks van $f(t)$ is gelijk aan:

$$e - 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{1 + k^2\pi^2} \left(e(-1)^k - 1 \right) \cos(k\pi t).$$

c) Bereken de gegeneraliseerde afgeleide $f'(t)$ van $f(t)$.

Deze functie heeft een aantal mogelijke discontinuïteiten. In 0 zal de absolute waarde van t voor een knik zorgen in de grafiek maar geen sprong. In -1, 1 (en alle 2-periodieke voortzettingen hiervan) kunnen echter sprongen ontstaan door de periodieke voortzetting. In -1 springt de functie van $e^{|-1|} = e$ naar $e^{|1|} = e$ en dus is daar ook geen discontinuïteit.

Voor $t \in (-1, 0)$ vinden we:

$$f(t) = e^{-t} \quad \Rightarrow \quad f'(t) = -e^{-t}$$

Voor $t \in (0, 1)$ vinden we:

$$f(t) = e^{t} \quad \Rightarrow \quad f'(t) = e^{t}$$

Dus voor $t \in (1, 1)$ geldt:

$$f'(t) = \operatorname{sgn}(t) e^{|t|}$$

en dit moet 2-periodiek worden voortgezet.

d) Bepaal het vermogen van f.

Dit kan het makkelijkste in het tijddomein:

$$P_f = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$

dus

$$
\begin{aligned}
P_f &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left|e^{|t|}\right|^2 \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} e^{-2t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} e^{2t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left[-\tfrac{1}{2}e^{-2t}\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}e^{2t}\right]_{0}^{1} \\
&= \frac{1}{4}(e^2-1) + \frac{1}{4}(e^2-1) \\
&= \frac{1}{2}(e^2-1)
\end{aligned}
$$

Je kunt natuurlijk ook meteen zien dat de stukken tussen $[-1, 0]$ en tussen $[0, 1]$ een gelijke bijdrage opleveren aan het vermogen.

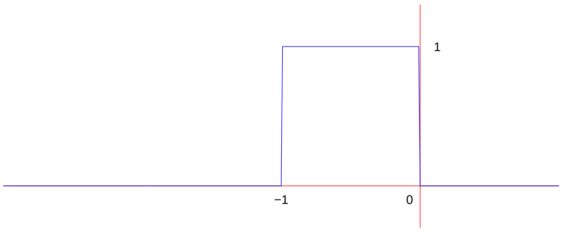
2.

Voor een filter wordt de frequentieresponsie $H(\omega)$ gegeven door

$$H(\omega) = \mathrm{rect}_2(2\omega + 1)$$

a) Teken $H(\omega)$ en beargumenteer waarom de impulsresponsie geen reëel signaal zal zijn.

We hebben de volgende grafiek voor $H(\omega)$:



De Fouriergetransformeerde van een reëel signaal is altijd symmetrisch in de zin dat:

$$H(-\omega) = H(\omega)^*$$

Dit is in ons geval duidelijk niet het geval en dus is de impulsresponsie geen reëel signaal.

b) Bepaal de impulsresponsie van het systeem.

Uit de tekening van $H(\omega)$ zien we direct dat:

$$H(\omega) = \mathrm{rect}_1\left(\omega + \tfrac{1}{2}\right).$$

We krijgen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{rect}_1(t) &\longleftrightarrow \frac{2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega} \\
\frac{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{t} &\longleftrightarrow 2\pi\,\mathrm{rect}_1(-\omega) \\
\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\pi t} &\longleftrightarrow \mathrm{rect}_1(\omega) \\
\frac{e^{-it/2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\pi t} &\longleftrightarrow \mathrm{rect}_1\left(\omega + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

We vinden dus dat de impulsresponie gelijk is aan:

$$\frac{e^{-it/2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\pi t}$$

en dat kunnen we nog wat vereenvoudigen:

$$\frac{1 - e^{-it}}{2\pi i t}$$

Aan het systeem wordt een ingangssignaal

$$u(t) = \frac{t\cos(\frac{1}{4}t) + 2\sin(\frac{1}{2}t)}{t}$$

toegevoerd.
Zij $y(t)$ de responsie van het systeem op het gegeven ingangssignaal $u(t)$.

c) Toon aan dat $y(t)$ bandbegrensd is en bepaal een conditie op de bemonsteringsperiode die garandeert dat $y(t)$ exact reconstrueerbaar is uit een bemonstering.

We hebben:

$$Y(\omega) = H(\omega)U(\omega)$$

Omdat $H(\omega) = 0$ voor alle ω met $|\omega| > 1$ geldt dit ook voor $Y(\omega)$ en krijgen we dus dat $y(t)$ bandbegrensd is

Om de kleinste ω_c te vinden waarvoor geldt dat $Y(\omega) = 0$ voor alle ω met $|\omega| > \omega_c$ moeten we ook naar $U(\omega)$ kijken. We hebben:

$$u(t) = \cos(\tfrac{1}{4}t) + \frac{2\sin(\frac{1}{2}t)}{t}$$

Bovendien:

$$\cos(\tfrac{1}{4}t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega + \tfrac{1}{4}) + \pi\delta(\omega - \tfrac{1}{4})$$

en

$$\begin{aligned} \mathrm{rect}_1(t) &\longleftrightarrow \frac{2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega} \\ \frac{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{t} &\longleftrightarrow 2\pi\,\mathrm{rect}_1(-\omega) = 2\pi\,\mathrm{rect}_1(\omega) \end{aligned}$$

We krijgen dus:

$$U(\omega) = \pi\delta(\omega + \tfrac{1}{4}) + \pi\delta(\omega - \tfrac{1}{4}) + 2\pi\,\mathrm{rect}_1(\omega)$$

Nu moeten we $Y(\omega) = H(\omega)U(\omega)$ uitrekenen en krijgen:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \left[\pi\delta(\omega + \tfrac{1}{4}) + \pi\delta(\omega - \tfrac{1}{4}) + 2\pi\,\mathrm{rect}_1(\omega)\right]\mathrm{rect}_1\left(\omega + \tfrac{1}{2}\right) \\ &= \pi\delta(\omega + \tfrac{1}{4}) + 2\pi\,\mathrm{rect}_{1/2}\left(\omega + \tfrac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

en hebben we dus dat $Y(\omega) = 0$ voor alle ω met $|\omega| > \frac{1}{2}$. We vinden daarom dat $\omega_c = \frac{1}{2}$. We kunnen dus perfect reconstrueren als de bemonsteringsfrequentie ω_s voldoet aan $\omega_s > 1$. De bemonsteringsperiode moet dus kleiner zijn dan 2π.

d) Bereken de responsie $y(t)$.

We hebben:

$$\begin{aligned} 1 &\longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \\ e^{-it/4} &\longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega + \tfrac{1}{4}) \\ \tfrac{1}{2}e^{-it/4} &\longleftrightarrow \pi\delta(\omega + \tfrac{1}{4}) \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \mathrm{rect}_{1/2}(t) &\longleftrightarrow \frac{2\sin\left(\frac{\omega}{4}\right)}{\omega} \\ \frac{2\sin\left(\frac{t}{4}\right)}{t} &\longleftrightarrow 2\pi\,\mathrm{rect}_{1/2}(-\omega) = 2\pi\,\mathrm{rect}_{1/2}(\omega) \\ \frac{2e^{-it/4}\sin\left(\frac{t}{4}\right)}{t} &\longleftrightarrow 2\pi\,\mathrm{rect}_{1/2}\left(\omega + \tfrac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

We krijgen:

$$y(t) = \tfrac{1}{2}e^{-it/4} + \frac{2e^{-it/4}\sin\left(\frac{t}{4}\right)}{t} = \tfrac{1}{2}e^{-it/4} + \frac{1 - e^{-it/2}}{it}$$

3.

Bepaal de convolutie van $f(t) = \sin(t)\,\mathbb{1}(t)$ en $g(t) = e^{-t}\,\mathbb{1}(t)$ op twee verschillende manieren.

We hebben:

$$\begin{aligned} (f \star g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\tau)\,\mathbb{1}(\tau)e^{-(t-\tau)}\,\mathbb{1}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

Dit levert 0 op voor $t < 0$ terwijl we voor $t > 0$ hebben:

$$\begin{aligned}
(f \star g)(t) &= \int_0^t \sin(\tau) e^{-(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \tfrac{1}{2i} \int_0^t \left(e^{i\tau} - e^{-i\tau}\right) e^{-(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \tfrac{1}{2i}\, e^{-t} \int_0^t e^{(1+i)\tau} - e^{(1-i)\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \tfrac{1}{2i}\, e^{-t} \left[\tfrac{1}{1+i}\left(e^{(1+i)t} - 1\right) - \tfrac{1}{1-i}\left(e^{(1-i)t} - 1\right)\right] \\
&= \tfrac{1}{4i} \left[(1-i)\left(e^{it} - e^{-t}\right) - (1+i)\left(e^{-it} - e^{-t}\right)\right] \\
&= \tfrac{1}{4i} \left[\left(e^{it} - e^{-it}\right) - i\left(e^{it} + e^{-it}\right) + 2ie^{-t}\right] \\
&= \tfrac{1}{2}\sin t - \tfrac{1}{2}\cos t + \tfrac{1}{2}e^{-t}
\end{aligned}$$

Dit was alleen voor $t > 0$. Samen met het feit dat voor $t < 0$ de convolutie gelijk is aan nul krijgen we:

$$\tfrac{1}{2}\sin(t)\,\mathbb{1}(t) - \tfrac{1}{2}\cos(t)\,\mathbb{1}(t) + \tfrac{1}{2}e^{-t}\,\mathbb{1}(t)$$

Met de Fouriertransformatie werken is lastig omdat $f(t)$ lastig is om te Fourier transformeren. Aan de andere kant, omdat we met causale signalen werken, kunnen we heel goed met de Laplace transformatie uit de voeten.

De Laplacegetransformeerde van $f(t)$ is gelijk aan:

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

terwijl de Laplacegetransformeerde van $g(t)$ gelijk is aan:

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

maar dan is de Laplacegetransformeerde van $(f \star g)(t)$ gelijk aan:

$$F(\omega)G(\omega) = \frac{1}{s^2+1}\frac{1}{s+1}$$

Voor de inverse Laplacetransformatie gaan we eerst breuksplitsen

$$\frac{1}{s^2+1}\frac{1}{s+1} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

We krijgen

$$A(s^2+1) + (Bs+C)(1+s) = 1$$

en voor $s = -1$ krijgen we $A = \frac{1}{2}$. Aan de andere kant, $s = 0$ levert op $A + C = 1$ en dus $C = \frac{1}{2}$ en tot slot de s termen levert op $B + C = 0$ en dus $B = -\frac{1}{2}$. We hebben dus

$$F(s)G(s) = \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{2(s^2+1)} - \frac{s}{2(s^2+1)}$$

Nu gaan we de inverse Laplacetransformatie toepassen:

$$\tfrac{1}{2}\sin t\,\mathbb{1}\,t - \tfrac{1}{2}\cos t\,\mathbb{1} + \tfrac{1}{2}e^{-t}\,\mathbb{1}\,t$$

4.

Drie professoren zijn hun college aan het voorbereiden. Volgens professor Lupin bevat de Fourier getransformeerde van een periodieke functie altijd oneindig veel delta-functies. Volgens professor Flitwick bevat de Fourier getransformeerde van een niet absoluut integreerbare functie altijd delta-functies. Professor McGonagall is het hier niet mee eens; het moet omgekeerd worden: als een functie absoluut integreerbaar is dan bevat de Fouriergetransformeerde geen delta-functies.
Geef voor elk van de professoren aan of ze gelijk dan wel ongelijk hebben en waarom.

Professor Lupin heeft natuurlijk ongelijk. Zo bevat de Fourier getransformeerde van $\sin(t)$ slechts twee delta-functies. Professor Flitwick heeft ook al ongelijk; kijk maar naar de Fourier getransformeerde van $\operatorname{sgn}(t)$. Tot slot heeft professor McGonagall wel gelijk. Voor een absoluut integreerbaar signaal is de standaard definitie van een Fourier getransformeerde:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

voor elke waarde van t prima gedefinieerd en zal er dus nooit oneindig uit komen wat je met delta-functies kunt associëren.

5.

Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$y^{(3)}(t) + 2y^{(2)}(t) + y^{(1)}(t) = u^{(1)}(t) - u(t). \tag{1}$$

a) Bepaal de impulsresponsie van (1).

We hebben omdat alle begincondities nul zijn

$$s^3Y(s) + 2s^2Y(s) + sY(s) = sU(s) - U(s)$$

en dus:

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^3 + 2s^2 + s}U(s) = \frac{s-1}{s(s+1)^2}U(s)$$

We vinden de impulsresponsie door de inverse Laplace transformatie los te laten op de overdrachtsfunctie

$$H(s) = \frac{s-1}{s(s+1)^2}$$

We gaan eerst breuksplitsen:

$$\frac{s-1}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

Voor de constanten moet gelden:

$$A(s+1)^2 + Bs(s+1) + Cs = s - 1$$

Voor $s = -1$ krijgen we $C = 2$; voor $s = 0$ krijgen we $A = -1$ en tot slot krijgen we voor de s^2 termen $A + B = 0$ en dus $B = 1$. We krijgen dan de impulsresponsie:

$$h(t) = -\mathbb{1}(t) + e^{-t}\,\mathbb{1}(t) + 2te^{-t}\,\mathbb{1}(t)$$

b) Bepaal de stapresponsie van (1).

We hebben omdat alle begincondities nul zijn

$$s^3Y(s) + 2s^2Y(s) + sY(s) = sU(s) - U(s)$$

Dit keer is $u(t) = \mathbb{1}(t)$ en dus:

$$U(s) = \tfrac{1}{s}$$

en we krijgen dat de Laplace getransformeerde van de stapresponsie gelijk is aan:

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2(s+1)^2}$$

Om de stapresponsie te berekenen gaan we eerst breuksplitsen:

$$\frac{s-1}{s^2(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{(s+1)^2}$$

Voor de constanten moet gelden:

$$As(s+1)^2 + B(s+1)^2 + Cs^2(s+1) + Ds^2 = s - 1$$

Voor $s = -1$ krijgen we $D = -2$; voor $s = 0$ krijgen we $B = -1$; voor de s-termen krijgen we $A + 2B = 1$ en dus $A = 3$ en tot slot, voor de s^3-termen krijgen we $A + C = 0$ en dus $C = -3$. We krijgen dan de stapresponsie:

$$y(t) = (3 - t)\,\mathbb{1}(t) - (3 + 2t)e^{-t}\,\mathbb{1}(t)$$

c) Als ingang kiezen we $u(t) = \mathbb{1}(t)$. Bepaal de oplossing voor $t > 0$ van (1) met $y(0^-) = 2$, $y'(0^-) = 2$ en $y''(0^-) = 1$.

Als de begincondities niet nul zijn krijgen we:

$$\begin{aligned}
y^{(1)}(t) &\longleftrightarrow sY(s) - y(0^-) = sY(s) - 2\\
y^{(2)}(t) &\longleftrightarrow s(sY(s) - 2) - y'(0^-) = s^2Y(s) - 2s - 2\\
y^{(3)}(t) &\longleftrightarrow s(s^2Y(s) - 2s - 2) - y''(0^-) = s^3Y(s) - 2s^2 - 2s - 1
\end{aligned}$$

We krijgen:

$$(s^3 + 2s^2 + s)Y(s) - 2s^2 - 2s - 1 - 2(2s + 2) - 2 = (s - 1)U(s)$$

en dus

$$(s^3 + 2s^2 + s)Y(s) = 2s^2 + 6s + 7 + (s - 1)U(s)$$

Omdat $u(t) = \mathbb{1}(t)$ krijgen we $U(s) = \frac{1}{s}$ en

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 6s + 7}{s(s+1)^2} + \frac{s-1}{s^2(s+1)^2}$$

Uit het vorig onderdeel weten we:

$$(3 - t)\,\mathbb{1}(t) - (3 + 2t)e^{-t}\,\mathbb{1}(t) \longleftrightarrow \frac{s-1}{s^2(s+1)^2}$$

Om de eerste term uit te rekenen moeten we weer breuksplitsen:

$$\frac{2s^2+6s+7}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

Voor de constanten moet gelden:

$$A(s+1)^2 + Bs(s+1) + Cs = 2s^2 + 6s + 7$$

Voor $s = -1$ krijgen we $C = -3$; voor $s = 0$ krijgen we $A = 7$ en tot slot krijgen we voor de s^2 termen $A + B = 2$ en dus $B = -5$. We vinden:

$$7\,\mathbb{1}(t) - (5+3t)e^{-t}\,\mathbb{1}(t) \longleftrightarrow \frac{2s^2+6s+7}{s(s+1)^2}$$

Dat levert op voor $t > 0$:

$$y(t) = 7 - (5+3t)e^{-t} + (3-t) - (3+2t)e^{-t} = (10-t) - (8+5t)e^{-t}$$