UNIVERSITEIT TWENTE
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Uitwerking tentamen Signalen en Transformaties (156081) op maandag 18 januari 2010, 13.45 – 16.45 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!

1.

Zij $f(t)$ de functie die wordt gegeven door

$$f(t) = |\sin(t) - \cos(t)|$$

a) Toon aan dat $g(t) = \sin(t) - \cos(t)$ een sinusoïde is en bepaal de amplitude en beginfase.

Dit kun je onder andere makkelijk zien als je beseft dat we hebben:

$$\begin{aligned}
\sin(t) + \cos(t) &= (\tfrac{1}{2i} - \tfrac{1}{2i})e^{it} + (-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2i})e^{-it} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i3\pi/4}e^{it} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i3\pi/4}e^{-it} \\
&= \sqrt{2}\cos(t - \tfrac{3\pi}{4})
\end{aligned}$$

De amplitude is dus $\sqrt{2}$ en de beginfase is $-\frac{3\pi}{4}$.

b) Toon aan dat de complexe Fouriercoëfficiënten van $f(t)$ gelijk zijn aan:

$$f_k = \frac{2\sqrt{2}}{\pi(1-4k^2)}e^{-ik\pi/2}$$

Omdat $T = \pi$ hebben we $\omega_0 = 2$. We krijgen:

$$\begin{aligned}
f_k &= \frac{1}{\pi}\int_{\pi/4}^{5\pi/4} f(t)e^{-2ikt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\pi/4}^{5\pi/4} \sqrt{2}\cos(t - \tfrac{3\pi}{4})e^{-2ikt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_{\pi/4}^{5\pi/4} \left[e^{i(t-3\pi/4)} + e^{-i(t-3\pi/4)}\right]e^{-2ikt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_{\pi/4}^{5\pi/4} \left[e^{-i3\pi/4}e^{i(1-2k)t} + e^{i3\pi/4}e^{-i(1+2k)t}\right]\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\left[\tfrac{e^{-i3\pi/4}}{i(1-2k)}\left(e^{i(1-2k)5\pi/4} - e^{i(1-2k)\pi/4}\right) - \tfrac{e^{i3\pi/4}}{i(1+2k)}\left(e^{-i(1+2k)5\pi/4} - e^{-i(1+2k)\pi/4}\right)\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\left[\tfrac{e^{-i3\pi/4}}{i(1-2k)}\left(-2e^{i(1-2k)\pi/4}\right) - \tfrac{e^{i3\pi/4}}{i(1+2k)}\left(-2e^{-i(1+2k)\pi/4}\right)\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[\tfrac{-e^{-i\pi/2}}{i(1-2k)}e^{-ik\pi/2} + \tfrac{e^{i\pi/2}}{i(1+2k)}e^{-ik\pi/2}\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[\tfrac{1}{1-2k} + \tfrac{1}{1+2k}\right]e^{-ik\pi/2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{2}{1-4k^2}e^{-ik\pi/2}
\end{aligned}$$

We vinden dus:

$$f_k = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{2}{1-4k^2}e^{-ik\pi/2}$$

b) Bereken de reële Fourierreeks van $f(t)$.

We weten dat de reële Fourierreeks van $f(t)$ wordt gegeven door:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t).$$

In ons geval geldt dat $\omega_0 = 2$ en $2f_k = a_k - ib_k$ waarbij we de f_k al bij onderdeel (1b) hebben berekend. We hebben:

$$a_k - ib_k = 2f_k = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\frac{1}{1-4k^2}e^{-ik\pi/2}$$

en f_k is dus reëel voor k even terwijl het reële deel nul is voor k oneven. Hieruit volgt:

$$a_k = \begin{cases} 0 & k \text{ oneven} \\ \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\frac{1}{1-4k^2}(-1)^{k/2} & k \text{ even} \end{cases}$$

en

$$b_k = \begin{cases} 0 & k \text{ even} \\ \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\frac{1}{1-4k^2}(-1)^{(k+1)/2} & k \text{ oneven} \end{cases}$$

De reële Fourierreeks van $f(t)$ is dus gelijk aan:

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} + \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^m}{1-16m^2}\cos(4mt) + \frac{(-1)^m}{1-4(2m+1)^2}\sin(2(2m+1)t)\right].$$

waarbij we $k = 2m$ gekozen hebben voor de cosinus termen en $k = 2m+1$ gekozen hebben voor de sinus termen omdat de andere termen toch geen bijdrage leveren.

d) Bereken de gegeneraliseerde afgeleide $f'(t)$ van $f(t)$.

Als $\sin t - \cos t > 0$ hebben we:

$$f(t) = \sin t - \cos t$$

en dus:

$$f'(t) = \cos t + \sin t$$

Aan de andere kant, als $\sin t - \cos t < 0$ hebben we:

$$f(t) = -\sin t + \cos t$$

en dus:

$$f'(t) = -\cos t - \sin t$$

Verder is de functie continu en komen er dus geen δ-pulsen in de afgeleide. Bovenstaande kunnen we als volgt in één formule uitdrukken:

$$f'(t) = (\cos t + \sin t)\,\mathrm{sgn}(\sin t - \cos t)$$

e) Bepaal het vermogen van f.

Dit kan het makkelijkste in het tijddomein:

$$P_f = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

dus

$$\begin{aligned} P_f &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\cos^2(t - \tfrac{3}{4}\pi)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2} = 1 \end{aligned}$$

Dat de integraal van de $\cos^2$ over een volledige periode gelijk is aan $\pi/2$ volgt uit het feit dat $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ en het feit dat $\sin^2$ en $\cos^2$ hetzelfde vermogen hebben omdat ze slechts een verschoven versie van elkaar zijn. Maar je kunt het ook formeel uitrekenen via:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(\cos(2x) + 1\right).$$

2.

Voor een filter wordt de impulsresponsie $h(t)$ gegeven door

$$h(t) = \mathrm{rect}_2(2t + 1)$$

a) Bepaal de frequentieresponsie $\hat{h}(\omega)$ van het systeem.

We hebben

$$\mathrm{rect}_2(2t + 1) = \mathrm{rect}_1(t + \tfrac{1}{2})$$

en dus:

$$\begin{aligned} \mathrm{rect}_1(t) &\longleftrightarrow \frac{2\sin(\frac{\omega}{2})}{\omega} \\ \mathrm{rect}_1(t + \tfrac{1}{2}) &\longleftrightarrow \frac{2\sin(\frac{\omega}{2})}{\omega}e^{i\omega/2}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\hat{h}(\omega) = \frac{2\sin(\frac{\omega}{2})}{\omega}e^{i\omega/2} = \frac{e^{i\omega} - 1}{i\omega}$$

Aan het systeem wordt een ingangssignaal

$$u(t) = \sin(t) + \cos(t)$$

toegevoerd. Zij $y(t)$ de responsie van het systeem op het gegeven ingangssignaal $u(t)$.

b) Bereken de responsie $y(t)$ en toon aan dat $y(t)$ een reëel signaal is.

$u(t)$ is een periodiek signaal. Als $u(t)$ een periodiek signaal is met Fourierreeks:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k e^{-ik\omega_0 t}$$

dan hebben we:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{h}(k\omega_0) u_k e^{-ik\omega_0 t}$$

In ons geval,

$$\begin{aligned} u(t) &= \tfrac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right) + \tfrac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right) \\ &= \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2i}\right) e^{it} + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2i}\right) e^{-it} \end{aligned}$$

en dus:

$$y(t) = \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2i}\right) \hat{h}(1) e^{it} + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2i}\right) \hat{h}(-1) e^{-it}$$

We hebben:

$$\hat{h}(1) = i(1 - e^{i}), \quad \hat{h}(-1) = -i(1 - e^{-i}),$$

Hiermee vinden we:

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2i}\right) i(1 - e^{i})e^{it} - \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2i}\right) i(1 - e^{-i})e^{-it} \\ &= \tfrac{1}{2}e^{it} + \tfrac{i}{2}e^{it} - \tfrac{1}{2}e^{i(t+1)} - \tfrac{i}{2}e^{i(t+1)} + \tfrac{1}{2}e^{-it} - \tfrac{i}{2}e^{-it} - \tfrac{1}{2}e^{-i(t+1)} + \tfrac{i}{2}e^{-i(t+1)} \\ &= \cos t - \sin t - \cos(t+1) + \sin(t+1) \end{aligned}$$

en dit is duidelijk een reëel signaal.

3.

Bepaal de convolutie van $f(t) = e^{2t}\,\mathbb{1}(-t)$ en $g(t) = e^{1-t}\,\mathbb{1}(t)$ op twee verschillende manieren.

We hebben:

$$\begin{aligned} (f \star g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\tau}\,\mathbb{1}(\tau) e^{1-(t-\tau)}\,\mathbb{1}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{1-t+3\tau}\,\mathbb{1}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

Voor $t < 0$ hebben we:

$$\begin{aligned} (f \star g)(t) &= \int_{-\infty}^{t} e^{1-t+3\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \tfrac{1}{3} e^{1+2t} \end{aligned}$$

Aan de andere kant voor $t > 0$ krijgen we:

$$\begin{aligned}(f \star g)(t) &= \int_{-\infty}^{0} e^{1-t+3\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \tfrac{1}{3}e^{1-t}\end{aligned}$$

Als we deze twee gevallen samenvoegen krijgen we:

$$\begin{aligned}(f \star g)(t) &= \begin{cases}\frac{1}{3}e^{1+2t} & t < 0 \\ \frac{1}{3}e^{1-t} & t > 0\end{cases} \\ &= \tfrac{1}{3}e^{1-t}\,\mathbb{1}(t) + \tfrac{1}{3}e^{1+2t}\,\mathbb{1}(-t)\end{aligned}$$

Omdat we geen causale signalen hebben moeten we Fouriertransformatie gebruiken in plaats van Laplacetransformatie.
We hebben:

$$\begin{aligned}e^{-2t}\,\mathbb{1}(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{2+i\omega} \\ e^{2t}\,\mathbb{1}(-t) &\longleftrightarrow \frac{1}{2-i\omega}\end{aligned}$$

De Fouriergetransformeerde van $f(t)$ is dus gelijk aan:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2-i\omega}$$

We hebben:

$$\begin{aligned}e^{-t}\,\mathbb{1}(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{1+i\omega} \\ e^{1-t}\,\mathbb{1}(t) &\longleftrightarrow \frac{e}{1+i\omega}\end{aligned}$$

De Fouriergetransformeerde van $g(t)$ is dus gelijk aan:

$$\hat{g}(\omega) = \frac{e}{1+i\omega}$$

Als we deze twee stappen combineren zien we dat de Fouriergetransformeerde van $(f \star g)(t)$ gelijk is aan:

$$\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) = \tfrac{e}{(2-i\omega)(1+i\omega)}$$

Via breuksplitsen vinden we:

$$\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) = \tfrac{e}{3(2-i\omega)} + \tfrac{e}{3(1+i\omega)}$$

Om de convolutie te bepalen moeten we nu de inverse Fouriertransformatie toepassen.
We hebben:

$$\begin{aligned}e^{2t}\,\mathbb{1}(-t) &\longleftrightarrow \tfrac{1}{2-i\omega} \\ e^{1-t}\,\mathbb{1}(t) &\longleftrightarrow \tfrac{e}{1+i\omega}\end{aligned}$$

en dus vinden we:

$$(f \star g)(t) = \tfrac{1}{3}e^{1+2t}\,\mathbb{1}(-t) + \tfrac{1}{3}e^{1-t}\,\mathbb{1}(t)$$

4.

Drie studenten zijn het college aan het nabespreken. Ze vragen zich af waarom de Laplace transformatie eigenlijk niet gedefinieerd wordt als:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

want de reguliere enkelzijdige Laplacetransformatie kan alleen maar met causale signalen omgaan. Volgens Cedric had dit te maken met het feit dat anders voor sommige onbegrensde functies, zoals bijvoorbeeld exponentiële functies, de Laplace transformatie niet gedefinieerd zou zijn. Volgens Luna was het probleem dat de inverse Laplace transformatie anders niet goed gedefinieerd was omdat $e^t\,\mathbb{1}(t)$ en $-e^t\,\mathbb{1}(-t)$, volgens deze definitie, dezelfde Laplace transformatie hebben. Volgens Oliver was het probleem dat de lineariteit in de problemen komt omdat het kan voorkomen dat de Laplace getransformeerden

$$F(s) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$
$$G(s) := \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

niet opgeteld kunnen worden omdat er geen enkele $s \in \mathbb{C}$ is waarvoor beide integralen tegelijkertijd goed gedefinieerd zijn.
Geef voor elk van de studenten aan of ze gelijk dan wel ongelijk hebben en waarom.

Voor een exponentiële functie $f(t) = e^t$ hebben we:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^t e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

Deze integraal uitrekenen gaat als volgt:

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{1-s}e^{(1-s)M} - \lim_{N\to-\infty} \frac{1}{1-s}e^{(1-s)N}$$

voor $s \neq 1$. We zien dat de eerste limiet bestaat als $\operatorname{Re} s > 1$. Voor $\operatorname{Re} s = 1$ bestaat de limiet alleen voor als het imaginair deel nul is maar dat conflicteert met $s \neq 1$. We zien dat de tweede limiet bestaat als $\operatorname{Re} s < 1$. Voor $\operatorname{Re} s = 1$ bestaat de limiet weer alleen voor als het imaginair deel nul en dat conflicteert nog steeds met $s \neq 1$. Resteert het geval $s = 1$ maar dan:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} 1\,\mathrm{d}t$$

en deze limiet bestaat weer niet. We zien dus dat Cedric gelijk heeft: de Laplace getransponeerde bestaat niet voor een exponentiële functie als e^t. Dit zelfde resultaat vinden we voor alle andere exponentiële functies e^{at}.

Om Luna's bewering te controleren kijken we naar: de Laplace getransformeerden van deze twee functies we hebben voor $f(t) = e^t\,\mathbb{1}(t)$ dat:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^t\,\mathbb{1}(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} e^{(1-s)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-s}$$

mits $\operatorname{Re} s > 0$ want anders bestaat de integraal niet. Aan de andere kant hebben we voor $g(t) = -e^t\, \mathbb{1}(-t)$ dat:

$$G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} -e^t\, \mathbb{1}(-t) e^{-st}\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} -e^{(1-s)t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{1-s}$$

maar in dit geval moet gelden $\operatorname{Re} s < 0$ want anders bestaat de integraal niet. We zien dat het wel lijkt of deze functies dezelfde Laplace transformatie hebben maar omdat ze op een totaal verschillend gebied ($\operatorname{Re} s > 0$ versus $\operatorname{Re} s < 0$) zijn de functies toch echt anders. Strict genomen heeft Luna dus niet gelijk.

Tot slot, hebben we de bewering van Oliver. Die heeft natuurlijk gelijk want we zien het via bovenstaand voorbeeld. $f(t)$ en $g(t)$ kunnen we optellen maar $F(s) + G(s)$ kunnen we niet definiëren omdat $F(s)$ alleen bestaat voor $\operatorname{Re} s > 0$ en $G(s)$ alleen bestaat voor $\operatorname{Re} s < 0$.

5.

Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$y^{(2)}(t) + y^{(1)}(t) = u^{(1)}(t) - u(t). \tag{1}$$

a) Bepaal de impulsresponsie van (1).

We hebben omdat alle begincondities nul zijn

$$s^2 Y(s) + sY(s) = sU(s) - U(s)$$

en dus:

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2+s} U(s)$$

We vinden de impulsresponsie door de inverse Laplace transformatie los te laten op de overdrachtsfunctie

$$H(s) = \frac{s-1}{s^2+s}$$

We gaan eerst breuksplitsen:

$$H(s) = \frac{s-1}{s(s+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s}$$

Voor de constanten moet gelden:

$$As + B(s+1) = s - 1$$

Voor $s = 0$ krijgen we $B = -1$; voor $s = -1$ krijgen we $A = 2$. We krijgen dan de impulsresponsie:

$$h(t) = \left(2e^{-t} - 1\right) \mathbb{1}(t)$$

b) Bepaal de stapresponsie van (1).

We hebben voor $t > 0$:

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{0-}^{t} (2e^{-\tau} - 1)\, \mathbb{1}(\tau)\, \mathrm{d}t \\ &= \int_{0-}^{t} 2e^{-\tau} - 1\, \mathrm{d}t \\ &= [-2e^{-\tau} - \tau\,]_0^t \\ &= -2e^{-t} - t + 2 \end{aligned}$$

We krijgen dus:

$$g(t) = \left(-2e^{-t} - t + 2\right) \mathbb{1}(t)$$

> c) Als ingang kiezen we $u(t) = e^t$. Bepaal de oplossing voor $t > 0$ van (1) met $y(0^-) = 1$ en $y'(0^-) = 0$.

Als de begincondities niet nul zijn krijgen we:

$$\begin{aligned} y^{(1)}(t) &\longleftrightarrow sY(s) - y(0^-) = sY(s) - 1 \\ y^{(2)}(t) &\longleftrightarrow s(sY(s) - 1) - y'(0^-) = s^2Y(s) - s \end{aligned}$$

We hebben:

$$U(s) = \frac{1}{s-1}$$

en

$$u^{(1)}(t) \longleftrightarrow sU(s) - u(0^-) = \frac{s}{s-1} - 1 = \frac{1}{s-1}$$

wat natuurlijk logisch is want $u^{(1)}(t) = u(t)$. We krijgen:

$$(s^2 + s)Y(s) - s - 1 = 0$$

en dus

$$(s^2 + s)Y(s) = s + 1$$

Dus:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s+1}{s(s+1)} \\ &= \frac{1}{s} \end{aligned}$$

We vinden voor $t > 0$:

$$y(t) = 1$$