UNIVERSITEIT TWENTE
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Tentamen Signalen en Transformaties (156081) op maandag 25 oktober 2010, 8.45 – 11.45 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!

---

1. Zij $f(t)$ de π-periodieke functie die voor $t \in [0, \pi)$ wordt gegeven door

$$f(t) = \sin(t)\, \mathbb{1}\left(\tfrac{\pi}{2} - t\right) - \cos(t)\, \mathbb{1}\left(t - \tfrac{\pi}{2}\right)$$

   a) Toon aan dat $f(t)$ ook een $\frac{\pi}{2}$-periodieke functie is.
   b) Toon aan dat de reële Fourierreeks van $f(t)$ gegeven wordt door:

$$\frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1 - 16k^2)} [\cos(4kt) + 4k \sin(4kt)]$$

   c) Bereken de gegeneraliseerde afgeleide $f'(t)$ van $f(t)$.
   d) Bepaal het vermogen van f.

2. Voor een filter wordt de impulsresponsie $h(t)$ gegeven door

$$h(t) = 2\frac{\sin^3(t)}{t^2}$$

   a) Bepaal de frequentieresponsie $\hat{h}(\omega)$ van het systeem en schets de bijbehorende grafiek van $|\hat{h}(\omega)|$.

   Aan het systeem wordt een ingangssignaal

$$u(t) = 1 + \sin(t) + \cos(2t) - \sin(3t)$$

   toegevoerd. Zij $y(t)$ de responsie van het systeem op het gegeven ingangssignaal $u(t)$.

   b) Bereken de responsie $y(t)$ en toon aan dat $y(t)$ een reëel signaal is.

3. Bepaal de convolutie van $f(t) = e^{-|t|}$ en $g(t) = \mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t-1)$ op twee verschillende manieren.

z.o.z.

---

4. Drie studenten zijn het college aan het nabespreken. Ze bestudeerden de functies:

   $$f(t) = \frac{\sin(t)}{t} \text{ en } g(t) = \cos(t).$$

   Volgens Ron was de convolutie van deze twee functies goed gedefinieerd omdat beide functies begrensd zijn. Harry zei dat je de convolutie het beste kon berekenen via de Fouriertransformatie en hij kreeg:

   $$\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) = \pi^2 \operatorname{rect}_2(\omega)\,[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)] = \frac{\pi^2}{2}\,[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)]$$

   en dus is de convolutie gelijk aan

   $$\frac{\pi}{2}\cos(t).$$

   Volgens Hermione is er toch iets raars aan de hand want als je de convolutie rechtstreeks uitrekent komt er iets uit van de vorm:

   $$A\sin t + B\cos t$$

   maar de uitdrukking die zij krijgt voor A is:

   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\tau)}{\tau}\,d\tau$$

   waarvan zij beweert dat die niet bestaat. Ze beweert bovendien dat Harry een fout heeft gemaakt die misschien de oorzaak is van deze discrepantie.

   Geef voor elk van de studenten aan of ze gelijk dan wel ongelijk hebben en waarom.

5. Gegeven is de differentiaalvergelijking

   $$y^{(2)}(t) + y(t) = u^{(1)}(t) - u(t). \tag{1}$$

   a) Bepaal de impulsresponsie van (1).

   b) Bepaal de stapresponsie van (1).

   c) Als ingang kiezen we $u(t) = \cos(2t)$. Bepaal de oplossing voor $t > 0$ van (1) met $y(0^-) = 1$ en $y'(0^-) = 0$.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk	1.	12 punten	Vraagstuk	3.	8 punten	Vraagstuk	5.	12 punten
Vraagstuk	2.	12 punten	Vraagstuk	4.	10 punten			

Het cijfer wordt bepaald door bij het totaal der behaalde punten 6 punten op te tellen en dan door 6 te delen.

Formuleblad Signalen en Transformaties (156081)

<u>Integraaltransformaties</u>

<u>Tabel Fourier transformaties</u>

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt} \qquad \boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega}$$

$f(t)$	$\hat{f}(\omega)$
$\mathrm{rect}_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } \lvert t\rvert < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{voor } \lvert t\rvert > \frac{a}{2} \end{cases} \quad a > 0$	$\frac{2\sin\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{\omega}$
$\mathrm{trian}_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{\lvert t\rvert}{a} & \text{voor } \lvert t\rvert < a \\ 0 & \text{voor } \lvert t\rvert > a \end{cases} \quad a > 0$	$\frac{4\sin^2\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{a\omega^2}$
$e^{-a\lvert t\rvert}, \ \mathrm{Re}\, a > 0$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
$\frac{t^n}{n!}e^{-at}\,\mathbb{1}(t), \ \mathrm{Re}\, a > 0, n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{(a+i\omega)^{n+1}}$
$e^{-at^2}, \ a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\left(\frac{-\omega^2}{4a}\right)}$
$\delta(t)$	1
$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } t > 0 \\ 0 & \text{voor } t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{2}{i\omega}$

Tabel Laplace transformaties

$$\boxed{F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt}$$ éénzijdige Laplace transformatie

$f(t)$	$F(s)$	conv. abscis
$e^{at}\,\mathbb{1}(t)$	$\frac{1}{s-a}$	$\operatorname{Re} a$
$\frac{t^n}{n!}e^{at}\,\mathbb{1}(t),\;\; n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{(s-a)^{n+1}}$	$\operatorname{Re} a$
$\cos(bt)\,\mathbb{1}(t),\;\; b \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+b^2}$	0
$\sin(bt)\,\mathbb{1}(t),\;\; b \in \mathbb{R}$	$\frac{b}{s^2+b^2}$	0
$\delta(t)$	1	$-\infty$

Rekenregels

Fourierreeksen (periode T, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$)

$$\begin{aligned}
f(t) &\longleftrightarrow f_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-ik\omega_0 t}\,dt \\
f(t-\tau) &\longleftrightarrow e^{-ik\omega_0\tau} f_k \\
e^{in\omega_0 t} f(t) &\longleftrightarrow f_{k-n} \qquad (n \text{ geheel})
\end{aligned}$$

Fourier transformatie

$$\begin{aligned}
f(t) &\longleftrightarrow \hat{f}(\omega) \\
f(t-t_0) &\longleftrightarrow e^{-i\omega t_0}\hat{f}(\omega) \qquad (t_0 \in \mathbb{R}) \\
e^{i\omega_0 t} f(t) &\longleftrightarrow \hat{f}(\omega-\omega_0) \qquad (\omega_0 \in \mathbb{R}) \\
f'(t) &\longleftrightarrow i\omega\hat{f}(\omega) \\
\hat{f}(t) &\longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)
\end{aligned}$$

Laplace transformatie

$$\begin{aligned}
f(t) &\longleftrightarrow F(s) \\
f(t-t_0)\,\mathbb{1}(t-t_0) &\longleftrightarrow e^{-st_0}F(s) \qquad (t_0 \geq 0) \\
e^{s_0 t} f(t) &\longleftrightarrow F(s-s_0) \qquad (s_0 \in \mathbb{C}) \\
f'(t) &\longleftrightarrow sF(s) - f(0^-)
\end{aligned}$$