UNIVERSITEIT TWENTE
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Uitwerking tentamen Signalen en Transformaties (201100109) op maandag 21 januari 2012, 13.45 – 16.45 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!

1.

> Zij $f(t)$ de 3-periodieke functie die voor $t \in [-1,2)$ wordt gegeven door
>
> $$f(t) = \tfrac{2}{3}t$$
>
> a) Toon aan dat de complexe Fouriercoëfficiënten van $f(t)$ gelijk zijn aan:
>
> $$f_k = \frac{i}{k\pi} e^{\frac{2}{3}ik\pi}$$
>
> voor $k \neq 0$ en $f_0 = 1/3$.

Omdat $T = 3$ hebben we $\omega_0 = \frac{2}{3}\pi$. We krijgen voor $k \neq 0$:

$$\begin{aligned}
f_k &= \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} \frac{2}{3} t e^{-i\frac{2}{3}\pi k t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{-1}{ik\pi} t e^{-i\frac{2}{3}\pi k t}\right]_{-1}^{2} - \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} \frac{-1}{ik\pi} e^{-i\frac{2}{3}\pi k t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{i}{3k\pi}\left(2e^{-i\frac{4}{3}\pi k} + e^{i\frac{2}{3}\pi k}\right) + \frac{1}{3}\left[\frac{3}{2k^2\pi^2} e^{-i\frac{2}{3}\pi k t}\right]_{-1}^{2} \\
&= \frac{i}{k\pi} e^{i\frac{2}{3}\pi k} + \frac{1}{2k^2\pi^2}\left(e^{-i\frac{4}{3}\pi k} - e^{i\frac{2}{3}\pi k}\right) \\
&= \frac{i}{k\pi} e^{i\frac{2}{3}\pi k}
\end{aligned}$$

en dat is gelijk aan de gegeven uitkomst. Voor $k = 0$ krijgen we:

$$\begin{aligned}
f_0 &= \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} \frac{2}{3} t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{9}\left[t^2\right]_{-1}^{2} \\
&= \frac{1}{9}(4-1) \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

> b) Bepaal de reële Fourierreeks van $f(t)$.

We weten dat de reële Fourierreeks van $f(t)$ wordt gegeven door:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t).$$

We hebben $\omega_0 = \frac{2}{3}\pi$. Daarnaast geldt $2f_k = a_k - ib_k$. We hebben voor $k \neq 0$

$$2f_k = \frac{2i}{k\pi}\left(\cos(\tfrac{2}{3}k\pi) + i\sin(\tfrac{2}{3}k\pi)\right)$$

en dus voor $k \neq 0$:

$$a_k = -\frac{2}{k\pi}\sin(\tfrac{2}{3}k\pi), \quad b_k = -\frac{2}{k\pi}\cos(\tfrac{2}{3}k\pi)$$

Hieruit volgt dat de reële Fourierreeks gelijk is aan:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[\sin(\tfrac{2}{3}k\pi)\cos(\tfrac{2}{3}\pi kt) + \cos(\tfrac{2}{3}k\pi)\sin(\tfrac{2}{3}\pi kt)\right].$$

c) Is f gelijk aan de reële Fourierreeks voor alle $t \in \mathbb{R}$?

We weten dat de reële Fourierreeks van $f(t)$ gelijk is aan

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2}$$

Dit is natuurlijk gelijk aan $f(t)$ voor alle $t \in \mathbb{R}$ waar de functie continu is. Maar in het punt -1 is de functie niet continu:

$$f(-1^-) = f(2^-) = \lim_{t\uparrow 2} f(t) = \frac{4}{3}, \qquad f(-1^+) = \lim_{t\downarrow -1} f(t) = -\frac{2}{3},$$

Dus de reële Fourierreeks voor $t = -1$ is gelijk aan $\frac{1}{3}$ en niet gelijk aan $f(-1) = -\frac{2}{3}$.

d) Bereken de gegeneraliseerde afgeleide $f'(t)$ van $f(t)$.

Voor $t \in (-1, 2)$ hebben we:

$$f(t) = \tfrac{2}{3}t$$

en dus:

$$f'(t) = \tfrac{2}{3}$$

maar zoals we al zagen heeft de functie in -1 een sprong omlaag van $\frac{4}{3}$ naar $-\frac{2}{3}$ en dus komt er ook nog een δ-functie in de afgeleide. Dus voor $t \in (-1^-, 2)$ hebben we:

$$f'(t) = \tfrac{2}{3} - 2\delta(t+1)$$

en dit moet 3-periodiek wordt voortgezet. In het bijzonder heeft de afgeleide dus een δ-puls in $-7, -4, -1, 2, 5$, etc.

e) Bepaal het vermogen van f.

Dit kan het makkelijkste in het tijddomein:

$$P_f = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t$$

dus

$$
\begin{aligned}
P_f &= \frac{4}{27}\int_{-1}^{2} t^2 \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{4}{81}\left[\,t^3\,\right]_{-1}^{2} \\
&= \frac{4}{81}\,(8+1) \\
&= \frac{4}{9}
\end{aligned}
$$

2.

> Voor een filter wordt de impulsresponsie $h(t)$ gegeven door
>
> $$h(t) = \frac{\cos t}{t^2+1}$$
>
> a) Laat zien dat de frequentieresponsie $\hat{h}(\omega)$ van het systeem gegeven wordt door
>
> $$\hat{h}(\omega) = \begin{cases} \pi e^{\omega}\cosh(1) & \omega < -1 \\ \pi e^{-1}\cosh(\omega) & -1 \le \omega \le 1 \\ \pi e^{-\omega}\cosh(1) & \omega > 1 \end{cases}$$
>
> *Hint:* bedenk dat
>
> $$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

We hebben

$$
\begin{aligned}
e^{-|t|} &\longleftrightarrow \frac{2}{\omega^2+1} \\
\frac{2}{t^2+1} &\longleftrightarrow 2\pi e^{-|\omega|} \\
\frac{1}{t^2+1} &\longleftrightarrow e^{-|\omega|} \\
\frac{\cos(t)}{t^2+1} &\longleftrightarrow \tfrac{\pi}{2}\left(e^{-|\omega-1|} + e^{-|\omega+1|}\right)
\end{aligned}
$$

Voor $\omega < -1$ hebben we:

$$\tfrac{\pi}{2}\left(e^{-|\omega-1|} + e^{-|\omega+1|}\right) = \tfrac{\pi}{2}\left(e^{\omega-1} + e^{\omega+1}\right) = e^{\omega}\pi\cosh(1).$$

Aan de andere kant, voor $\omega > 1$ hebben we:

$$\tfrac{\pi}{2}\left(e^{-|\omega-1|} + e^{-|\omega+1|}\right) = \tfrac{\pi}{2}\left(e^{-\omega+1} + e^{-\omega-1}\right) = e^{-\omega}\pi\cosh(1).$$

Tot slot, voor $-1 \le \omega \le 1$ hebben we:

$$\tfrac{\pi}{2}\left(e^{-|\omega-1|} + e^{-|\omega+1|}\right) = \tfrac{\pi}{2}\left(e^{\omega-1} + e^{-\omega-1}\right) = e^{-1}\pi\cosh(\omega).$$

Dit levert dus de frequentieresponsie op zoals gegeven in de opgave. Hierbij hebben we de reciprociteitsregel en de verschuivingsregel gebruikt

Aan het systeem wordt een ingangssignaal

$$u(t) = 1 - \sin(2t)$$

toegevoerd. Zij $y(t)$ de responsie van het systeem op het gegeven ingangssignaal $u(t)$.

b) Bereken de responsie $y(t)$ en toon aan dat $y(t)$ een reëel signaal is.

$u(t)$ is een periodiek signaal. Als $u(t)$ een periodiek signaal is met Fourierreeks:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k e^{ik\omega_0 t}$$

dan hebben we:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{h}(k\omega_0) u_k e^{ik\omega_0 t}$$

In ons geval,

$$u(t) = 1 - \tfrac{1}{2i}\left(e^{2it} - e^{-2it}\right)$$

en dus:

$$y(t) = \hat{h}(0) - \tfrac{1}{2i}\left(\hat{h}(2)e^{2it} - \hat{h}(-2)e^{-2it}\right)$$

We hebben:

$$\hat{h}(0) = \pi e^{-1}$$
$$\hat{h}(2) = \pi e^{-2}\cosh(1) \qquad \hat{h}(-2) = \pi e^{-2}\cosh(1)$$

Hiermee vinden we:

$$\begin{aligned} y(t) &= \pi e^{-1} - -\tfrac{\pi}{2i}\left(\pi e^{-2}\cosh(1)e^{2it} + \pi e^{-2}\cosh(1)e^{-2it}\right) \\ &= \pi e^{-1} - \pi e^{-2}\cosh(1)\sin(2t). \end{aligned}$$

en dit is duidelijk een reëel signaal.

3.

Bepaal de convolutie van $f(t) = (e^{-t} - 1)\,\mathbb{1}(t)$ en $g(t) = f'(t)$ op twee verschillende manieren.

Omdat alle signalen causaal en begrensd zijn kunnen we zowel Laplacetransformatie als Fouriertransformatie gebruiken. Wij kiezen hier voor de Laplacetransformatie.

We hebben:

$$f(t) = (e^{-t} - 1)\,\mathbb{1}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s}$$

en hieruit volgt:

$$g(t) = f'(t) \longleftrightarrow \frac{s}{s+1} - 1 = -\frac{1}{s+1}$$

maar dan:

$$(f * g)(t) \longleftrightarrow -\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s}\right)\frac{1}{s+1} = -\frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s(s+1)}$$

Breuksplitsen leert ons dat:

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$$

met $A(s+1) + Bs = 1$. Hieruit volgt $A = 1$ en $B = -1$ en dus:

$$(f * g)(t) \longleftrightarrow -\frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

en dus:

$$(f * g)(t) = -te^{-t}\,\mathbb{1}(t) + \mathbb{1}(t) - e^{-t}\,\mathbb{1}(t) \tag{*}$$

We kunnen dit ook rechtstreeks via de definitie berekenen. We hebben:

$$g(t) = f'(t) = -e^{-t}\,\mathbb{1}(t)$$

merk op dat de functie f continu is en er dus geen δ-functies in de afgeleide komen.

$$\begin{aligned}(f \star g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} -(e^{-\tau} - 1)\,\mathbb{1}(\tau)e^{-t+\tau}\,\mathbb{1}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

Dit levert 0 op voor $t < 0$ omdat dan $\mathbb{1}(\tau) = 0$ voor $\tau > 0$ en $\mathbb{1}(t-\tau) = 0$ voor $\tau < 0$. Voor $t > 0$ krijgen we:

$$\begin{aligned}(f \star g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-t+\tau} - e^{-t}\right)\mathbb{1}(\tau)\,\mathbb{1}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t e^{-t+\tau} - e^{-t}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \left[e^{-t+\tau} - \tau e^{-t}\right]_{\tau=0}^{t} \\ &= 1 - e^{-t} - te^{-t}\end{aligned}$$

Gecombineerd met het gegeven dat de convolutie een causaal signaal is krijgen we nu ook (*) als antwoord.

4.

We bekijken de ruimte van reëelwaardige functies $\mathcal{L}_2(0,1)$ met de volgende complete orthonormale basis:

$$\begin{aligned}e_0(t) &= 1 \\ e_k(t) &= \sqrt{2}\cos(k\pi t)\end{aligned}$$

voor $k = 1, 2, \ldots$ ten opzichte van het inproduct

$$\langle x, y\rangle = \int_0^1 x(t)y(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Schrijf $f(t) = \sin(\pi t)$ in termen van de gegeven orthonormale basis.

We hebben voor $k = 0$:

$$\langle f, e_0 \rangle = \int_0^1 \sin(\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{\pi}\,(\,\cos(\pi) - \cos(0)\,) = \frac{2}{\pi}$$

Voor $k \neq 0$ hebben we:

$$\begin{aligned}
\langle f, e_k \rangle &= \sqrt{2}\int_0^1 \sin(\pi t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{2}\int_0^1 \tfrac{1}{4i}\left(e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}\right)\left(e^{ik\pi t} + e^{-ik\pi t}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4i}\int_0^1 e^{i(k+1)\pi t} - e^{-i(k-1)\pi t} + e^{i(1-k)\pi t} - e^{-i(k+1)\pi t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \sin((k+1)\pi t) - \sin((k-1)\pi t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Voor $k \neq 0$ en $k \neq 1$ krijgen we:

$$\begin{aligned}
\langle f, e_k \rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[-\frac{1}{(k+1)\pi}\cos((k+1)\pi t) + \frac{1}{(k-1)\pi}\cos((k-1)\pi t)\right]_0^1 \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[-\frac{1}{(k+1)\pi}\left(\cos((k+1)\pi) - 1\right) + \frac{1}{(k-1)\pi}\left(\cos((k-1)\pi) - 1\right)\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[-\frac{1}{(k+1)\pi}\left((-1)^{k+1} - 1\right) + \frac{1}{(k-1)\pi}\left((-1)^{k-1} - 1\right)\right]
\end{aligned}$$

Dit levert op:

$$\langle f, e_k \rangle = \begin{cases} 0 & k \text{ oneven} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1}\right] & k \text{ even} \end{cases}$$

of

$$\langle f, e_k \rangle = \begin{cases} 0 & k \text{ oneven} \\ \frac{2\sqrt{2}}{\pi(1-k^2)} & k \text{ even} \end{cases}$$

Tot slot krijgen we voor $k = 1$:

$$\langle f, e_1 \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \sin(2\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\tfrac{1}{2\pi}\cos(2\pi t)\right]_0^1 = 0$$

We hebben:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\langle f, e_k \rangle e_k(t) = \frac{2}{\pi}e_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2\sqrt{2}}{\pi(1-4m^2)}e_{2m}(t)$$

waarbij ik $k = 2m$ gebruik omdat de oneven termen toch 0 zijn.

b) Gegeven is de lineaire afbeelding $\mathcal{A} : \mathcal{L}_2(0,1) \to \mathcal{L}_2(0,1)$ met $\mathcal{A}(f) = g$ waarbij

$$g(t) = f(0) + \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Bepaal $\ker(\mathcal{A})$.

Als $\mathcal{A}(f) = 0$ dan hebben we:

$$0 = f(0) + \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

voor alle $t \in [0,1]$. We kunnen dit differentiëren en we krijgen:

$$f(t) = 0$$

voor alle $t \in [0,1]$. Kortom $\ker(\mathcal{A}) = \{0\}$.

5.

Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$y^{(3)}(t) + 2y^{(2)}(t) + y^{(1)}(t) = u^{(1)}(t) - u(t). \tag{1}$$

a) Bepaal de impulsresponsie van (1).

We hebben omdat alle begincondities nul zijn

$$s^3Y(s) + 2s^2Y(s) + sY(s) = sU(s) - U(s)$$

en dus:

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^3+2s^2+s}U(s) = \frac{s-1}{s(s+1)^2}U(s)$$

We vinden de impulsresponsie door de inverse Laplace transformatie los te laten op de overdrachtsfunctie

$$H(s) = \frac{s-1}{s(s+1)^2}$$

We gaan eerst breuksplitsen:

$$\frac{s-1}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

Voor de constanten moet gelden:

$$A(s+1)^2 + Bs(s+1) + Cs = s-1$$

Voor $s = -1$ krijgen we $C = 2$; voor $s = 0$ krijgen we $A = -1$ en tot slot krijgen we voor de s^2 termen $A + B = 0$ en dus $B = 1$. We krijgen dan de impulsresponsie:

$$h(t) = -\mathbb{1}(t) + e^{-t}\,\mathbb{1}(t) + 2te^{-t}\,\mathbb{1}(t)$$

b) Bepaal de stapresponsie van (1).

We hebben omdat alle begincondities nul zijn

$$s^3Y(s) + 2s^2Y(s) + sY(s) = sU(s) - U(s)$$

Dit keer is $u(t) = \mathbb{1}(t)$ en dus:

$$U(s) = \tfrac{1}{s}$$

en we krijgen dat de Laplace getransformeerde van de stapresponsie gelijk is aan:

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2(s+1)^2}$$

Om de stapresponsie te berekenen gaan we eerst breuksplitsen:

$$\frac{s-1}{s^2(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{(s+1)^2}$$

Voor de constanten moet gelden:

$$As(s+1)^2 + B(s+1)^2 + Cs^2(s+1) + Ds^2 = s - 1$$

Voor $s = -1$ krijgen we $D = -2$; voor $s = 0$ krijgen we $B = -1$; voor de s-termen krijgen we $A + 2B = 1$ en dus $A = 3$ en tot slot, voor de s^3-termen krijgen we $A + C = 0$ en dus $C = -3$. We krijgen dan de stapresponsie:

$$y(t) = (3-t)\,\mathbb{1}(t) - (3+2t)e^{-t}\,\mathbb{1}(t)$$

c) Als ingang kiezen we $u(t) = \mathbb{1}(t)$. Bepaal de oplossing voor $t > 0$ van (1) met $y(0^-) = 2$, $y'(0^-) = 2$ en $y''(0^-) = 1$.

Als de begincondities niet nul zijn krijgen we:

$$y^{(1)}(t) \longleftrightarrow sY(s) - y(0^-) = sY(s) - 2$$

$$y^{(2)}(t) \longleftrightarrow s(sY(s) - 2) - y'(0^-) = s^2Y(s) - 2s - 2$$

$$y^{(3)}(t) \longleftrightarrow s(s^2Y(s) - 2s - 2) - y''(0^-) = s^3Y(s) - 2s^2 - 2s - 1$$

We krijgen:

$$(s^3 + 2s^2 + s)Y(s) - 2s^2 - 2s - 1 - 2(2s+2) - 2 = (s-1)U(s)$$

en dus

$$(s^3 + 2s^2 + s)Y(s) = 2s^2 + 6s + 7 + (s-1)U(s)$$

Omdat $u(t) = \mathbb{1}(t)$ krijgen we $U(s) = \frac{1}{s}$ en

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 6s + 7}{s(s+1)^2} + \frac{s-1}{s^2(s+1)^2}$$

Uit het vorig onderdeel weten we:

$$(3-t)\,\mathbb{1}(t) - (3+2t)e^{-t}\,\mathbb{1}(t) \longleftrightarrow \frac{s-1}{s^2(s+1)^2}$$

Om de eerste term uit te rekenen moeten we weer breuksplitsen:

$$\frac{2s^2 + 6s + 7}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

Voor de constanten moet gelden:

$$A(s+1)^2 + Bs(s+1) + Cs = 2s^2 + 6s + 7$$

Voor $s = -1$ krijgen we $C = -3$; voor $s = 0$ krijgen we $A = 7$ en tot slot krijgen we voor de s^2 termen $A + B = 2$ en dus $B = -5$. We vinden:

$$7\,\mathbb{1}(t) - (5+3t)e^{-t}\,\mathbb{1}(t) \longleftrightarrow \frac{2s^2 + 6s + 7}{s(s+1)^2}$$

Dat levert op voor $t > 0$:

$$y(t) = 7 - (5+3t)e^{-t} + (3-t) - (3+2t)e^{-t} = (10-t) - (8+5t)e^{-t}$$