

Tentamen Signalen en Transformaties (201100109) op maandag 21 januari 2012, 8.45 – 11.45 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!

Bij dit tentamen mag U een eigen, handgeschreven, formuleblad (A4) gebruiken. Een grafische of programmeerbare rekenmachine is niet toegestaan.

1. Zij $f(t)$ de 3-periodieke functie die voor $t \in [-1, 2)$ wordt gegeven door

$$f(t) = \frac{2}{3}t$$

- a) Toon aan dat de complexe Fouriercoëfficiënten van $f(t)$ gelijk zijn aan:

$$f_k = \frac{i}{k\pi} e^{\frac{2}{3}ik\pi}$$

voor $k \neq 0$ en $f_0 = 1/3$.

- b) Bepaal de reële Fourierreeks van $f(t)$.
 c) Is f gelijk aan de reële Fourierreeks voor alle $t \in \mathbb{R}$?
 d) Bereken de gegeneraliseerde afgeleide $f'(t)$ van $f(t)$.
 e) Bepaal het vermogen van f .

2. Voor een filter wordt de impulsresponsie $h(t)$ gegeven door

$$h(t) = \frac{\cos t}{t^2 + 1}$$

- a) Laat zien dat de frequentieresponsie $\hat{h}(\omega)$ van het systeem gegeven wordt door

$$\hat{h}(\omega) = \begin{cases} \pi e^{\omega} \cosh(1) & \omega < -1 \\ \pi e^{-1} \cosh(\omega) & -1 \leq \omega \leq 1 \\ \pi e^{-\omega} \cosh(1) & \omega > 1 \end{cases}$$

Hint: bedenk dat

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Aan het systeem wordt een ingangssignaal

$$u(t) = 1 - \sin(2t)$$

toegevoerd. Zij $y(t)$ de responsie van het systeem op het gegeven ingangssignaal $u(t)$.

- b) Bereken de responsie $y(t)$ en toon aan dat $y(t)$ een reëel signaal is.

3. Bepaal de convolutie van $f(t) = (e^{-t} - 1) \mathbb{1}(t)$ en $g(t) = f'(t)$ op twee verschillende manieren.

4. We bekijken de ruimte van reëelwaardige functies $\mathcal{L}_2(0, 1)$ met de volgende complete orthonormale basis:

$$e_0(t) = 1$$

$$e_k(t) = \sqrt{2} \cos(k\pi t)$$

voor $k = 1, 2, \dots$ ten opzichte van het inproduct

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)y(t) dt$$

- a) Schrijf $f(t) = \sin(\pi t)$ in termen van de gegeven orthonormale basis.
b) Gegeven is de lineaire afbeelding $\mathcal{A} : \mathcal{L}_2(0, 1) \rightarrow \mathcal{L}_2(0, 1)$ met $\mathcal{A}(f) = g$ waarbij

$$g(t) = f(0) + \int_0^t f(\tau) d\tau$$

Bepaal $\ker(\mathcal{A})$.

5. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$y^{(3)}(t) + 2y^{(2)}(t) + y^{(1)}(t) = u^{(1)}(t) - u(t). \quad (1)$$

- a) Bepaal de impulsresponsie van (1).
b) Bepaal de stapresponsie van (1).
c) Als ingang kiezen we $u(t) = \mathbb{1}(t)$. Bepaal de oplossing voor $t > 0$ van (1) met $y(0^-) = 2$, $y'(0^-) = 2$ en $y''(0^-) = 1$.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk 1. 12 punten Vraagstuk 3. 9 punten Vraagstuk 5. 12 punten
Vraagstuk 2. 12 punten Vraagstuk 4. 9 punten

Het cijfer wordt bepaald door bij het totaal der behaalde punten 6 punten op te tellen en dan door 6 te delen.

Formuleblad Signalen en Transformaties (201100109)

INTEGRAALTRANSFORMATIES

Tabel Fourier transformaties

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$f(t)$	$\hat{f}(\omega)$
$\text{rect}_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } t < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{voor } t > \frac{a}{2} \end{cases} \quad a > 0$	$\frac{2 \sin\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{\omega}$
$\text{trian}_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{ t }{a} & \text{voor } t < a \\ 0 & \text{voor } t > a \end{cases} \quad a > 0$	$\frac{4 \sin^2\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{a\omega^2}$
$e^{-a t }, \quad \text{Re } a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$\frac{t^n}{n!} e^{-at} \mathbb{1}(t), \quad \text{Re } a > 0, n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{1}{(a+i\omega)^{n+1}}$
$e^{-at^2}, \quad a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\left(\frac{-\omega^2}{4a}\right)}$
$\delta(t)$	1
$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } t > 0 \\ 0 & \text{voor } t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{i\omega}$

Tabel Laplace transformaties

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad \text{éénzijdige Laplace transformatie}$$

$f(t)$	$F(s)$	conv. abscis
$e^{at} \mathbb{1}(t)$	$\frac{1}{s-a}$	$\text{Re } a$
$\frac{t^n}{n!} e^{at} \mathbb{1}(t), n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{1}{(s-a)^{n+1}}$	$\text{Re } a$
$\cos(bt) \mathbb{1}(t), b \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+b^2}$	0
$\sin(bt) \mathbb{1}(t), b \in \mathbb{R}$	$\frac{b}{s^2+b^2}$	0
$\delta(t)$	1	$-\infty$

Rekenregels

Fourierreeksen (periode $T, \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$)

$$f(t) \longleftrightarrow f_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-ik\omega_0 t} dt$$

$$f(t - \tau) \longleftrightarrow e^{-ik\omega_0 \tau} f_k$$

$$e^{in\omega_0 t} f(t) \longleftrightarrow f_{k-n} \quad (n \text{ geheel})$$

Fourier transformatie

$$f(t) \longleftrightarrow \hat{f}(\omega)$$

$$f(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-i\omega t_0} \hat{f}(\omega) \quad (t_0 \in \mathbb{R})$$

$$e^{i\omega_0 t} f(t) \longleftrightarrow \hat{f}(\omega - \omega_0) \quad (\omega_0 \in \mathbb{R})$$

$$f'(t) \longleftrightarrow i\omega \hat{f}(\omega)$$

$$\hat{f}(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

Laplace transformatie

$$f(t) \longleftrightarrow F(s)$$

$$f(t - t_0) \mathbb{1}(t - t_0^-) \longleftrightarrow e^{-st_0} F(s) \quad (t_0 \geq 0)$$

$$e^{s_0 t} f(t) \longleftrightarrow F(s - s_0) \quad (s_0 \in \mathbb{C})$$

$$f'(t) \longleftrightarrow sF(s) - f(0^-)$$