UNIVERSITEIT TWENTE
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Uitwerking tentamen Signalen en Transformaties (201100109) op vrijdag 19 april 2013, 13.45 – 16.45 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!

1.

> Zij $f(t)$ de 2-periodieke functie die voldoet aan:
>
> $$f(t) = \begin{cases} -1 & t \in [-1, 0] \\ 2 & t \in (0, 1) \end{cases}$$
>
> a) Toon aan dat de reële Fourierreeks van $f(t)$ gegeven wordt door:
>
> $$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{(2k-1)\pi} \sin((2k-1)\pi t)$$

Omdat $T = 2$ hebben we $\omega_0 = \pi$. We krijgen voor $k \neq 0$:

$$\begin{aligned}
f_k &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} f(t) e^{-i\pi k t}\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} -e^{-i\pi k t}\, \mathrm{d}t + \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} 2e^{-i\pi k t}\, \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{2i\pi k} e^{-i\pi k t} \right]_{-1}^{0} - \left[\frac{1}{i\pi k} e^{-i\pi k t} \right]_{0}^{1} \\
&= \frac{1}{2i\pi k} \left(1 - e^{-i\pi k} \right) - \frac{1}{i\pi k} \left(e^{-i\pi k} - 1 \right) \\
&= \frac{3}{2i\pi k} \left(1 - e^{-i\pi k} \right) \\
&= \frac{3}{2i\pi k} \left(1 - (-1)^k \right)
\end{aligned}$$

Voor $k = 0$ krijgen we:

$$\begin{aligned}
f_0 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} -1\, \mathrm{d}t + \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} 2\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

We hebben:

$$2f_k = a_k - ib_k$$

en dus

$$a_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & \text{anders} \end{cases} \qquad b_k = \begin{cases} \frac{6}{k\pi} & k \text{ oneven} \\ 0 & k \text{ even} \end{cases}$$

We weten dat de reële Fourierreeks van $f(t)$ wordt gegeven door:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t).$$

en we krijgen dus:

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{6}{(2m-1)\pi} \sin((2m-1)\pi t).$$

waarbij we gebruiken dat $k = 2m - 1$ omdat de even termen toch niets opleveren. Dit is gelijk aan het gegeven resultaat (als we m even vervangen door k).

b) Bepaal de reële Fourierreeks van $f(t)$.

We weten dat de reële Fourierreeks van $f(t)$ wordt gegeven door:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ik\omega_0 t}$$

Omdat voor k even alleen de term met $k = 0$ een rol speelt kunnen we dit schrijven als:

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_{2m-1} e^{i(2m-1)\pi t}$$

en we krijgen:

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{3}{i\pi(2m-1)} e^{i(2m-1)\pi t}$$

c) Is f gelijk aan de complexe Fourierreeks voor alle $t \in \mathbb{R}$?

We weten dat de complexe Fourierreeks van $f(t)$ gelijk is aan

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2}$$

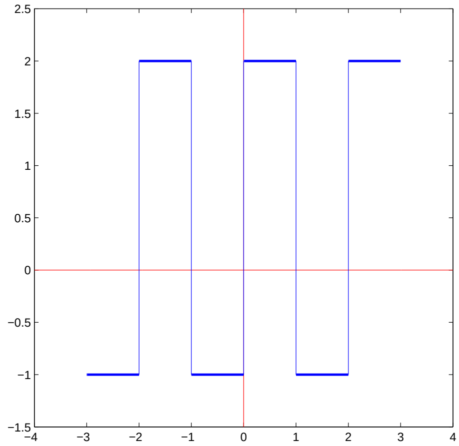
Dit is natuurlijk gelijk aan $f(t)$ voor alle $t \in \mathbb{R}$ waar de functie continu is. Maar in het punt 0 is de functie niet continu:

$$f(0-) = \lim_{t \uparrow 0} f(t) = -1 \qquad f(0+) = \lim_{t \downarrow 0} f(t) = 2,$$

Dus de reële Fourierreeks voor $t = 0$ is gelijk aan $\frac{1}{2}$ en niet gelijk aan $f(0) = -1$.

d) Bereken de gegeneraliseerde afgeleide $f'(t)$ van $f(t)$.

We hebben:



De functie is stuksgewijs constant met sprongen voor $t \in \mathbb{Z}$. De afgeleide bevat dus alleen δ-pulsen.

We krijgen voor $t \in (0-, 2-)$ dat:

$$f'(t) = 3\delta(t) - 3\delta(t-1)$$

en daarnaast weten we dat de afgeleide 2-periodiek is en dan is de afgeleide dus volledig vastgelegd.

e) Bepaal het vermogen van f.

Dit kan het makkelijkste in het tijddomein:

$$P_f = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$

dus

$$\begin{aligned} P_f &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} 1 \, \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} 4 \, \mathrm{d}t \\ &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{4}{2} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

2.

Voor een filter wordt de impulsresponsie $h(t)$ gegeven door

$$h(t) = \frac{1}{t^2 + 4t + 3}$$

a) Laat zien dat de frequentieresponsie $\hat{h}(\omega)$ van het systeem gegeven wordt door

$$\hat{h}(\omega) = \tfrac{1}{2}\pi i \left(e^{3i\omega} - e^{i\omega}\right) \operatorname{sgn}(\omega)$$

We hebben

$$\frac{1}{t^2 + 4t + 3} = \frac{1}{(t+1)(t+3)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+3}$$

met $A(t+3)+B(t+1)=1$. Voor $t=-1$ vinden we $A=\frac{1}{2}$ en voor $t=-3$ krijgen we $B=-\frac{1}{2}$ en dus:

$$\frac{1}{t^2+4t+3}=\frac{1}{2(t+1)}-\frac{1}{2(t+3)}$$

We hebben:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sgn}(t) &\longleftrightarrow \frac{2}{\omega^2+1}\\
\frac{2}{t^2+1} &\longleftrightarrow \frac{2}{i\omega}\\
\frac{2}{it} &\longleftrightarrow 2\pi\operatorname{sgn}(-\omega)\\
\frac{1}{t} &\longleftrightarrow -i\pi\operatorname{sgn}(\omega)\\
\frac{1}{t+1} &\longleftrightarrow -i\pi e^{i\omega}\operatorname{sgn}(\omega)\\
\frac{1}{t+3} &\longleftrightarrow -i\pi e^{3i\omega}\operatorname{sgn}(\omega).
\end{aligned}$$

We krijgen

$$h(t)\longleftrightarrow -\tfrac{1}{2}\pi i e^{i\omega}\operatorname{sgn}(\omega)+\tfrac{1}{2}\pi i e^{3i\omega}\operatorname{sgn}(\omega)$$

en dus

$$\hat{h}(\omega)=\tfrac{1}{2}\pi i\left(e^{3i\omega}-e^{i\omega}\right)\operatorname{sgn}(\omega)$$

Dit levert dus de frequentieresponsie op zoals gegeven in de opgave. Hierbij hebben we de reciprociteitsregel en de verschuivingsregel gebruikt

Aan het systeem wordt een ingangssignaal

$$u(t)=1+2\cos(t)$$

toegevoerd. Zij $y(t)$ de responsie van het systeem op het gegeven ingangssignaal $u(t)$.

b) Bereken de responsie $y(t)$ en toon aan dat $y(t)$ een reëel signaal is.

$u(t)$ is een periodiek signaal. Als $u(t)$ een periodiek signaal is met Fourierreeks:

$$u(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u_k e^{ik\omega_0 t}$$

dan hebben we:

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{h}(k\omega_0)u_k e^{ik\omega_0 t}$$

In ons geval,

$$u(t)=1+e^{it}+e^{-it}$$

en dus:

$$y(t) = \hat{h}(0) + \hat{h}(1)e^{it} + \hat{h}(-1)e^{-it}$$

We hebben:

$$\hat{h}(0) = 0$$
$$\hat{h}(1) = \tfrac{1}{2}\pi i\left(e^{3i} - e^{i}\right) \qquad \hat{h}(-1) = -\tfrac{1}{2}\pi i\left(e^{-3i} - e^{-i}\right)$$

Hiermee vinden we:

$$\begin{aligned} y(t) &= \tfrac{1}{2}\pi i\left(e^{3i} - e^{i}\right)e^{it} - \tfrac{1}{2}\pi i\left(e^{-3i} - e^{-i}\right)e^{-it} \\ &= \tfrac{1}{2}\pi i\left(e^{i(t+3)} - e^{i(t+1)}\right) - \tfrac{1}{2}\pi i\left(e^{-i(t+3)} - e^{-i(t+1)}\right) \\ &= -\pi\sin(t+3) + \pi\sin(t+1) \end{aligned}$$

en dit is duidelijk een reëel signaal.

3.

Bepaal de convolutie van $f(t) = (e^t + 1)\,\mathbb{1}(t)$ en $g(t) = e^{-t}\,\mathbb{1}(t)$ op twee verschillende manieren.

Omdat alle signalen causaal zijn kunnen we de Laplacetransformatie gebruiken. De Fouriertransformatie kan hier niet worden gebruikt omdat f niet begrensd is.

We hebben:

$$f(t) = (e^t + 1)\,\mathbb{1}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s}$$

en hieruit volgt:

$$g(t) = e^{-t}\,\mathbb{1}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+1}$$

maar dan:

$$(f * g)(t) \longleftrightarrow \left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s}\right)\frac{1}{s+1} = \frac{1}{(s+1)(s-1)} + \frac{1}{s(s+1)}$$

Breuksplitsen leert ons dat:

$$\frac{1}{(s+1)(s-1)} + \frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + +\frac{C}{s+1}$$

met

$$A(s-1)(s+1) + Bs(s+1) + Cs(s-1) = s + (s-1).$$

Hieruit volgt $A = 1$, $B = \frac{1}{2}$ en $C = -\frac{3}{2}$ en dus:

$$(f * g)(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s} + \frac{1}{2(s-1)} - \frac{3}{2(s+1)}$$

en dus:

$$(f * g)(t) = \left(1 + \tfrac{1}{2}e^{t} - \tfrac{3}{2}e^{-t}\right)\mathbb{1}(t) \tag{*}$$

We kunnen dit ook rechtstreeks via de definitie berekenen.

$$
\begin{aligned}
(f \star g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{\tau}+1)\,\mathbb{1}(\tau)e^{-t+\tau}\,\mathbb{1}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

Dit levert 0 op voor $t < 0$ omdat dan $\mathbb{1}(\tau) = 0$ voor $\tau > 0$ en $\mathbb{1}(t-\tau) = 0$ voor $\tau < 0$. Voor $t > 0$ krijgen we:

$$
\begin{aligned}
(f \star g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{\tau}+1)\,\mathbb{1}(\tau)e^{-t+\tau}\,\mathbb{1}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{0}^{t} e^{2\tau-t} + e^{\tau-t}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \left[\tfrac{1}{2}e^{2\tau-t} + e^{\tau-t}\right]_{\tau=0}^{t} \\
&= \tfrac{1}{2}e^{t} + 1 - \tfrac{1}{2}e^{-t} - e^{-t} \\
&= 1 + \tfrac{1}{2}e^{t} - \tfrac{3}{2}e^{-t}
\end{aligned}
$$

Gecombineerd met het gegeven dat de convolutie een causaal signaal is krijgen we nu ook (*) als antwoord.

4.

We bekijken de zogenaamde Hermite polynomen die gedefinieerd worden door:

$$p_0(x) = 1$$

en

$$p_{n+1}(x)e^{-x^2/2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p_n(x)e^{-x^2/2}\right] \tag{1}$$

We zien dat p_n een polynoom is van graad n. Bovendien definiëren we het volgende inproduct:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$$

a) Toon aan dat dit een goed-gedefinieerd inproduct is voor de ruimte $\mathcal{P}_N$ van polynomen van graad kleiner of gelijk aan N.

We moeten drie eigenschappen verifiëren:

- $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$
- $\langle \alpha f + g, h\rangle = \alpha\langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$
- $\langle f, f\rangle \geq 0$ en $\langle f, f\rangle = 0$ impliceert dat $f = 0$.

Die eigenschappen zijn overduidelijk. De eerste eigenschap volgt uit:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \langle g, f\rangle$$

De tweede eigenschap volgt uit:

$$\begin{aligned}\langle \alpha f + g, h\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha f(x) + g(x)]h(x)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f(x)h(x)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(x)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \\ &= \alpha\langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle.\end{aligned}$$

Tot slot:

$$\langle f,f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^2\, e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \geq 0$$

en als

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^2\, e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 0$$

dan volgt dat:

$$[f(x)]^2\, e^{-x^2/2} = 0$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$ en omdat de exponentiële functie nooit nul is moet wel gelden dat $f = 0$.

b) Toon aan dat $p_0, p_1, \ldots p_N$ een orthogonale basis vormen voor de ruimte $\mathcal{P}_N$ ten opzichte van dit inproduct.

Hint: Toon eerst aan dat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k p_n(x)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 0 \tag{2}$$

voor $k = 0, \ldots, n-1$ impliceert dat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k p_{n+1}(x)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 0$$

voor $k = 0, \ldots, n$.

We tonen via recursie aan dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k p_n(x)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 0$$

voor alle $k < n$. Voor $k = 0$ en $n > 0$ krijgen we:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_n(x)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \left[p_{n-1}(x)e^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty} = 0$$

want uit het gegeven dat (1) volgt dat de primitieve van $p_n(x)e^{-x^2/2}$ gegeven wordt door $p_{n-1}(x)e^{-x^2/2}$. Bovendien is makkelijk te zien omdat p_{n-1} een polynoom is dat

$$\lim_{x\to-\infty} p_{n-1}(x)e^{-x^2/2} = \lim_{x\to\infty} p_{n-1}(x)e^{-x^2/2} = 0$$

Stel nu dat (2) waar is voor $n \leq \bar{n}$ en $k = 0, \ldots, n-1$ dan krijgen we:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x^m p_{\bar{n}+1}(x)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x &= \left[x^m p_{\bar{n}}(x)e^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} m x^{m-1} p_{\bar{n}}(x)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \\ &= m\int_{-\infty}^{\infty} x^{m-1} p_{\bar{n}}(x)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 0\end{aligned}$$

voor $m = 0, \ldots, n$ en dus geldt (2) ook voor $n = \tilde{n} + 1$ en $k = 0, \ldots, n-1$. Uit recursie volgt nu dat (2) geldt voor alle n en $k = 0, \ldots, n-1$.

Maar nu hebben we dat:

$$\langle p_j, p_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p_j(x) p_n(x) e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$$

we weten dat p_j een polynoom is van graad kleiner of gelijk aan j dus we kunnen schrijven:

$$p_j(x) = \sum_{k=0}^{j} \alpha_k x^k$$

maar dan geldt voor $j \leq n$ volgens (2) dat:

$$\langle p_j, p_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{j} \alpha_k x^k p_n(x) e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 0$$

Merk op dat voor $j > n$ we hebben dat:

$$\langle p_j, p_n \rangle = \langle p_n, p_j \rangle = 0$$

Hieruit volgt dat de Hermite polynomen een orthogonale rij vormen. Omdat de Hermite polynomen ook allemaal ongelijk aan nul zijn volgt onafhankelijkheid. We moeten alleen nog bewijzen dat het een basis vormt. Maar gegeven is dat p_k een polynoom is van graad k. We gebruiken weer recursie. Voor $N = 0$ is duidelijk dat de bewering waar is. Stel dat $p_0, p_1, \ldots p_N$ een orthogonale basis vormen voor de ruimte $\mathcal{P}_N$ Omdat p_{N+1} een polynoom van graad $N+1$ is kun je het schrijven als:

$$p_{N+1}(x) = \alpha x^{N+1} + q_N(x)$$

met $\alpha \neq 0$ en q_N een polynoom van graad kleiner of gelijk aan N. Kies een willekeurig polynoom r in $\mathcal{P}_{N+1}$. Dit polynoom kun je schrijven als:

$$r(x) = \beta x^{N+1} + r_N(x)$$

met r_N een polynoom van graad kleiner of gelijk aan N. Maar dan is

$$r - \frac{\beta}{\alpha} p_{N+1}$$

een polynoom van graad kleiner of gelijk aan N en die kunnen we dus schrijven als een lineaire combinatie van $p_0, p_1, \ldots p_N$:

$$r - \frac{\beta}{\alpha} p_{N+1} = \sum_{k=0}^{N} \beta_k p_k$$

maar dan is r een lineaire combinatie van $p_0, p_1, \ldots p_{N+1}$. Omdat r een willekeurig polynoom was hebben we nu aangetoond dat $p_0, p_1, \ldots p_{N+1}$ de hele ruimte opspant. We wisten al dat $p_0, p_1, \ldots p_{N+1}$ onafhankelijk zijn en dus heb je een basis van $\mathcal{P}_{N+1}$.

5.

Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$y^{(2)}(t) - y(t) = u^{(1)}(t) - 2u(t). \tag{3}$$

a) Bepaal de impulsresponsie van (3).

We hebben omdat alle begincondities nul zijn

$$s^2Y(s) - Y(s) = sU(s) - 2U(s)$$

en dus:

$$Y(s) = \frac{s-2}{s^2-1}U(s) = \frac{s-2}{(s-1)(s+1)}U(s)$$

We vinden de impulsresponsie door de inverse Laplace transformatie los te laten op de overdrachtsfunctie

$$H(s) = \frac{s-2}{(s-1)(s+1)}$$

We gaan eerst breuksplitsen:

$$\frac{s-2}{(s-1)(s+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1}$$

Voor de constanten moet gelden:

$$A(s+1) + B(s-1) = s-2$$

Voor $s = -1$ krijgen we $B = \frac{3}{2}$; voor $s = 1$ krijgen we $A = -\frac{1}{2}$. We krijgen dan de impulsresponsie:

$$h(t) = -\frac{1}{2}e^{t}\,\mathbb{1}(t) + \frac{3}{2}e^{-t}\,\mathbb{1}(t)$$

b) Bepaal de stapresponsie van (3).

We hebben omdat alle begincondities nul zijn

$$s^2Y(s) - Y(s) = sU(s) - 2U(s)$$

Dit keer is $u(t) = \mathbb{1}(t)$ en dus:

$$U(s) = \tfrac{1}{s}$$

en we krijgen dat de Laplace getransformeerde van de stapresponsie gelijk is aan:

$$Y(s) = \frac{s-2}{s(s-1)(s+1)}$$

Om de stapresponsie te berekenen gaan we eerst breuksplitsen:

$$\frac{s-2}{s(s+1)(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-1}$$

Voor de constanten moet gelden:

$$A(s-1)(s+1) + Bs(s-1) + Cs(s+1) = s-2$$

Voor $s = -1$ krijgen we $B = -\frac{3}{2}$; voor $s = 0$ krijgen we $A = 2$ en tot slot, voor $s = 1$ krijgen we $C = -\frac{1}{2}$. We krijgen dan de stapresponsie:

$$y(t) = 2\,\mathbb{1}(t) - \tfrac{3}{2}e^{-t}\,\mathbb{1}(t) - \tfrac{1}{2}e^{t}\,\mathbb{1}(t)$$

c) Als ingang kiezen we $u(t) = \sin(t)\,\mathbb{1}(t)$. Bepaal de oplossing voor $t > 0$ van (3) met $y(0^-) = 1$ en $y'(0^-) = -1$.

Als de begincondities niet nul zijn krijgen we:

$$\begin{aligned} y^{(1)}(t) &\longleftrightarrow sY(s) - y(0^-) = sY(s) - 1 \\ y^{(2)}(t) &\longleftrightarrow s(sY(s) - 1) - y'(0^-) = s^2Y(s) - s + 1 \end{aligned}$$

We krijgen:

$$(s^2-1)Y(s) - s + 1 = (s-2)U(s)$$

en dus

$$(s^2-1)Y(s) = s - 1 + (s-2)U(s)$$

Omdat $u(t) = \sin(t)\,\mathbb{1}(t)$ krijgen we $U(s) = \frac{1}{s^2+1}$ en

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s-1)(s+1)} + \frac{s-2}{(s^2-1)(s^2+1)} = \frac{1}{s+1} + \frac{s-2}{(s^2-1)(s^2+1)}$$

Voor de tweede term gebruiken we weer breuksplitsen:

$$\frac{s-2}{(s^2-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

We krijgen:

$$A(s+1)(s^2+1) + B(s-1)(s^2+1) + (Cs+D)(s^2-1) = s-2$$

Voor $s = 1$ krijgen we $A = -\frac{1}{4}$ en voor $s = -1$ krijgen we $B = \frac{3}{4}$. De coëfficiënt van s^3 levert op $A + B + C = 0$ en dus $C = -\frac{1}{2}$. Tot slot voor $s = 0$ krijgen we $A - B - D = -2$ en dus $D = 1$. We vinden dus:

$$Y(s) = -\frac{1}{4(s-1)} + \frac{7}{4(s+1)} - \frac{s-2}{2(s^2+1)}$$

We vinden:

$$-\tfrac{1}{4}e^{t}\,\mathbb{1}(t) + \tfrac{7}{4}e^{-t}\,\mathbb{1}(t) - \tfrac{1}{2}\cos(t)\,\mathbb{1}(t) + \sin(t)\,\mathbb{1}(t) \longleftrightarrow -\frac{1}{4(s-1)} + \frac{7}{4(s+1)} - \frac{s-2}{2(s^2+1)}$$

Dat levert op voor $t > 0$:

$$y(t) = -\tfrac{1}{4}e^{t} + \tfrac{7}{4}e^{-t} - \tfrac{1}{2}\cos(t) + \sin(t)$$