UNIVERSITEIT TWENTE
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Tentamen Signalen en Transformaties (201100109) op vrijdag 19 april 2013, 13.45 – 16.45 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!

Bij dit tentamen mag U een eigen, handgeschreven, formuleblad (A4) gebruiken. Een grafische of programmeerbare rekenmachine is niet toegestaan.

---

1. Zij $f(t)$ de 2-periodieke functie die voldoet aan:

$$f(t) = \begin{cases} -1 & t \in [-1, 0] \\ 2 & t \in (0, 1) \end{cases}$$

   a) Toon aan dat de reële Fourierreeks van $f(t)$ gegeven wordt door:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{(2k-1)\pi} \sin((2k-1)\pi t)$$

   b) Bepaal de complexe Fourierreeks van $f(t)$.

   c) Is f gelijk aan de complexe Fourierreeks voor alle $t \in \mathbb{R}$?

   d) Bereken de gegeneraliseerde afgeleide $f'(t)$ van $f(t)$.

   e) Bepaal het vermogen van f.

2. Voor een filter wordt de impulsresponsie $h(t)$ gegeven door

$$h(t) = \frac{1}{t^2 + 4t + 3}$$

   a) Laat zien dat de frequentieresponsie $\hat{h}(\omega)$ van het systeem gegeven wordt door

$$\hat{h}(\omega) = \tfrac{1}{2}\pi i \left(e^{3i\omega} - e^{i\omega}\right) \operatorname{sgn}(\omega)$$

   Aan het systeem wordt een ingangssignaal

$$u(t) = 1 + 2\cos(t)$$

   toegevoerd. Zij $y(t)$ de responsie van het systeem op het gegeven ingangssignaal $u(t)$.

   b) Bereken de responsie $y(t)$ en toon aan dat $y(t)$ een reëel signaal is.

3. Bepaal de convolutie van $f(t) = (e^t + 1)\,\mathbb{1}(t)$ en $g(t) = e^{-t}\,\mathbb{1}(t)$ op twee verschillende manieren.

z.o.z.

---

4. We bekijken de zogenaamde Hermite polynomen die gedefinieerd worden door:

$$p_0(x) = 1$$

en

$$p_{n+1}(x)e^{-x^2/2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p_n(x)e^{-x^2/2}\right]$$

We zien dat p_n een polynoom is van graad n. Bovendien definiëren we het volgende inproduct:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$$

a) Toon aan dat dit een goed-gedefinieerd inproduct is voor de ruimte $\mathcal{P}_N$ van polynomen van graad kleiner of gelijk aan N.

b) Toon aan dat $p_0, p_1, \dots p_N$ een orthogonale basis vormen voor de ruimte $\mathcal{P}_N$ ten opzichte van dit inproduct.

Hint: Toon eerst aan dat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k p_n(x)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 0$$

voor $k = 0, \dots, n-1$ impliceert dat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k p_{n+1}(x)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 0$$

voor $k = 0, \dots, n$.

5. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$y^{(2)}(t) - y(t) = u^{(1)}(t) - 2u(t). \tag{1}$$

a) Bepaal de impulsresponsie van (1).

b) Bepaal de stapresponsie van (1).

c) Als ingang kiezen we $u(t) = \sin(t)\,\mathbb{1}(t)$. Bepaal de oplossing voor $t > 0$ van (1) met $y(0^-) = 1$ en $y'(0^-) = -1$.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk	1.	12 punten	Vraagstuk	3.	9 punten	Vraagstuk	5.	11 punten
Vraagstuk	2.	12 punten	Vraagstuk	4.	10 punten			

Het cijfer wordt bepaald door bij het totaal der behaalde punten 6 punten op te tellen en dan door 6 te delen.

Formuleblad Signalen en Transformaties (201100109)

Integraaltransformaties

Tabel Fourier transformaties

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt} \qquad \boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega}$$

$f(t)$	$\hat{f}(\omega)$
$\mathrm{rect}_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } \lvert t\rvert < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{voor } \lvert t\rvert > \frac{a}{2} \end{cases} \quad a > 0$	$\frac{2\sin\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{\omega}$
$\mathrm{trian}_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{\lvert t\rvert}{a} & \text{voor } \lvert t\rvert < a \\ 0 & \text{voor } \lvert t\rvert > a \end{cases} \quad a > 0$	$\frac{4\sin^2\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{a\omega^2}$
$e^{-a\lvert t\rvert}, \ \ \mathrm{Re}\,a > 0$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
$\frac{t^n}{n!}e^{-at}\,\mathbb{1}(t), \ \ \mathrm{Re}\,a > 0, n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{(a+i\omega)^{n+1}}$
$e^{-at^2}, \ \ a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{\left(\frac{-\omega^2}{4a}\right)}$
$\delta(t)$	1
$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } t > 0 \\ 0 & \text{voor } t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{2}{i\omega}$

Tabel Laplace transformaties

$$\boxed{F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt}$$ éénzijdige Laplace transformatie

$f(t)$	$F(s)$	conv. abscis
$e^{at}\,\mathbb{1}(t)$	$\frac{1}{s-a}$	$\operatorname{Re} a$
$\frac{t^n}{n!}e^{at}\,\mathbb{1}(t),\;\; n = 0,1,2,\dots$	$\frac{1}{(s-a)^{n+1}}$	$\operatorname{Re} a$
$\cos(bt)\,\mathbb{1}(t),\;\; b \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+b^2}$	0
$\sin(bt)\,\mathbb{1}(t),\;\; b \in \mathbb{R}$	$\frac{b}{s^2+b^2}$	0
$\delta(t)$	1	$-\infty$

Rekenregels

Fourierreeksen (periode T, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$)

$$\begin{aligned} f(t) &\longleftrightarrow f_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-ik\omega_0 t}\,dt \\ f(t-\tau) &\longleftrightarrow e^{-ik\omega_0\tau} f_k \\ e^{in\omega_0 t} f(t) &\longleftrightarrow f_{k-n} \qquad (n \text{ geheel}) \end{aligned}$$

Fourier transformatie

$$\begin{aligned} f(t) &\longleftrightarrow \hat{f}(\omega) \\ f(t-t_0) &\longleftrightarrow e^{-i\omega t_0}\hat{f}(\omega) \qquad (t_0 \in \mathbb{R}) \\ e^{i\omega_0 t} f(t) &\longleftrightarrow \hat{f}(\omega-\omega_0) \qquad (\omega_0 \in \mathbb{R}) \\ f'(t) &\longleftrightarrow i\omega\hat{f}(\omega) \\ \hat{f}(t) &\longleftrightarrow 2\pi f(-\omega) \end{aligned}$$

Laplace transformatie

$$\begin{aligned} f(t) &\longleftrightarrow F(s) \\ f(t-t_0)\,\mathbb{1}(t-t_0^-) &\longleftrightarrow e^{-st_0}F(s) \qquad (t_0 \geq 0) \\ e^{s_0 t} f(t) &\longleftrightarrow F(s-s_0) \qquad (s_0 \in \mathbb{C}) \\ f'(t) &\longleftrightarrow sF(s) - f(0^-) \end{aligned}$$