UNIVERSITEIT TWENTE

Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Tentamen Signalen en Transformaties (201100109) op maandag 14 april 2014, 13.45 - 16.45 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!

Bij dit tentamen mag U een eigen, handgeschreven, formuleblad (A4) gebruiken. Een grafische of programmeerbare rekenmachine is niet toegestaan.

---

1. Zij $f(t)$ de $\frac{\pi}{2}$-periodieke functie die voldoet aan:

$$f(t) = \cos t \quad \text{voor } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

   a) Toon aan dat de complexe Fouriercoëfficiënten van $f(t)$ gelijk zijn aan:

$$f_k = \frac{2}{\pi}\frac{1+4ki}{1-16k^2}$$

   b) Bepaal de reële Fourierreeks van $f(t)$.

   c) Is f gelijk aan de complexe Fourierreeks voor alle $t \in \mathbb{R}$?

   d) Bereken de gegeneraliseerde afgeleide $f'(t)$ van $f(t)$.

   e) Bepaal het vermogen van f.

2. Voor een filter wordt de impulsresponsie $h(t)$ gegeven door

$$h(t) = \arctan(\tfrac{t}{2}) = \int_0^{t/2} \frac{1}{1+\tau^2}\,d\tau.$$

   a) Laat zien dat de frequentieresponsie $\hat{h}(\omega)$ van het systeem gegeven wordt door

$$\hat{h}(\omega) = \frac{\pi e^{-2|\omega|}}{i\omega}$$

   Aan het systeem wordt een ingangssignaal

$$u(t) = \cos(2t+1)$$

   toegevoerd. Zij $y(t)$ de responsie van het systeem op het gegeven ingangssignaal $u(t)$.

   b) Bereken de responsie $y(t)$ en toon aan dat $y(t)$ een reëel signaal is.

3. Bepaal de convolutie van $f(t) = \mathbb{1}(t+1)$ en $g(t) = \cos(t)\,\mathbb{1}(t)$ op twee verschillende manieren.

z.o.z.

---

4. We bekijken de ruimte $\mathcal{L}^2[0,2]$ van reëelwaardige functies op het interval $[0,2]$ waarvoor geldt:

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^2 f(t)^2 \mathrm{d}t} < \infty$$

met de lineaire afbeelding $\mathcal{A} : \mathcal{L}^2[0,2] \to \mathcal{L}^2[0,2]$ gedefinieerd door:

$$\mathcal{A}f = g \text{ met } g(t) = tf(t) \text{ voor } t \in [0,2].$$

   a) Toon aan dat $\mathcal{A}$ een begrensde lineaire afbeelding is.

Voor de afbeelding $\mathcal{A}$ is de afbeelding:

$$\mathcal{B}f = g \text{ met } g(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}f(t) & \text{voor } t \in (0,2]. \\ f(0) & \text{voor } t = 0 \end{cases}$$

voor $f \in \mathcal{L}^2[0,2]$ een kandidaat inverse afbeelding.

   b) Toon aan dat $\mathcal{B}$ geen begrensde lineaire afbeelding van $\mathcal{L}^2[0,2]$ naar $\mathcal{L}^2[0,2]$ is.

5. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$y^{(2)}(t) - 2y^{(1)}(t) + 2y(t) = u'(t) + u(t). \tag{1}$$

   a) Bepaal de impulsresponsie van (1).

   b) Bepaal de stapresponsie van (1).

   c) Als ingang kiezen we $u(t) = 10e^{-2t}$. Bepaal de oplossing voor $t > 0$ van (1) met $y(0^-) = 1$ en $y'(0^-) = 2$.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk	1.	12 punten	Vraagstuk	3.	9 punten	Vraagstuk	5.	11 punten
Vraagstuk	2.	12 punten	Vraagstuk	4.	10 punten			

Het cijfer wordt bepaald door bij het totaal der behaalde punten 6 punten op te tellen en dan door 6 te delen.