FACULTEIT MANAGEMENT en BESTUUR
Datum: 11 april 2013

TENTAMEN STOCHASTISCHE MODELLEN IN OPERATIONS MANAGEMENT (191530881)

Dinsdag 16 april 2013, 8.45 – 11.45 uur

Opmerkingen vooraf:

1. Het gebruik van boeken, syllabi, **grafische rekenmachines** of aantekeningen is **niet** toegestaan bij dit tentamen. Een eenvoudige rekenmachine is wel toegestaan.
2. Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven.
3. De score voor dit tentamen is gelijk aan (aantal behaalde punten+4)/4.
4. **Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd en waar nodig van een berekening te worden voorzien.**

Opgave 1 (9 punten)

Een pas gebouwde duikboot vertrekt vanuit zijn thuishaven voor een proefvaart van twee maanden. Na een maand komt de boot weer even boven water en doet kort de thuishaven aan om te bunkeren. Vitaal voor het functioneren van de duikboot is een geheim precisie-onderdeel, in de wandeling MacGuffin genoemd. Deze MacGuffin gaat de eerste maand van zijn functioneren met kans 1/3 kapot. Wordt hij in die maand vervangen, dan gaat hij gegarandeerd niet meer stuk, maar de volgende maand is er opnieuw een kans van 1/3 op stuk gaan. De vraag is hoeveel MacGuffins er bij het eerste en bij het tweede vertrek uit de thuishaven moeten worden meegenomen om de verwachte kosten te minimaliseren. Het aanschaffen van een enkele MacGuffin kost 5000 euro, van twee MacGuffins tegelijk 7000 euro. Mocht er onverhoopt bij het crashen van een MacGuffin geen reserve-exemplaar aan boord zijn, dan moet dit per spoedheli gebracht worden; de kosten van aanschaf (inclusief vervoer) bedragen in dat geval 14400 euro. De aangeschafte MacGuffins hebben na afloop van de twee maanden geen restwaarde meer.
Bepaal een optimale aanschafstrategie m.b.v. stochastische dynamische programmering. (SDP).

a) Wat kies je als:
   - fasen (beslissingstijdstippen)
   - toestanden
   - beslissingen
   - optimale-waarde functie.
b) Geef de recurrente betrekking voor de optimale-waarde functie.
c) Los het probleem op door de recurrente bereking achterwaarts door te rekenen.
d) Geef een *policy table*.

Opgave 2 (9 punten)
Een TBK-student heeft een redelijk goed lopende webwinkel als bijverdienste. De student meet "hoe goed" de webwinkel loopt elke maand in een van de volgende 3 categorieën: L (minder dan gemiddeld), M (gemiddeld) of H (beter dan gemiddeld). De opbrengst van de winkel kan variëren van maand tot maand en is mede afhankelijk van hoe de winkel de voorafgaande maand liep. Aan het begin van elke maand beslist de student om al dan niet een kortingsactie te organiseren. Als hij kiest voor een kortingsactie, dan is de maandopbrengst in die maand lager, maar daar staat tegenover dat de kans groter is dat de winkel in die maand beter zal lopen dan zonder kortingsactie. Bijvoorbeeld, als de opbrengst vorige maand M was, dan is de kans op een opbrengst H deze maand groter met een kortingsactie dan zonder zo'n actie. Als de student geen kortingsactie organiseert, dan zijn de opbrengsten per maand €700 (L), €900 (M), resp. €1100 (H), terwijl de opbrengsten per maand bij een kortingsactie gelijk zijn aan resp. €500 (L), €700 (M) en €900 (H).
De overgangskansen van maand tot maand, indien er niet en wel kortingsacties zijn, staan in de volgende tabellen.

	Deze maand		
Vorige maand	L	M	H
L	0,7	0,3	0
M	0,4	0,6	0
H	0,3	0,5	0,2

Geen kortingsactie deze maand

	Deze maand		
Vorige maand	L	M	H
L	0,1	0,7	0,2
M	0,1	0,5	0,4
H	0,1	0,3	0,6

Wel kortingsactie deze maand

De student vraagt zich af wat de optimale kortingssstrategie is die de verwachte verdisconteerde opbrengsten over een oneindige horizon maximaliseert bij een verdisconteringsfactor van $\beta = 0,9$ per maand.

a) Bepaal voor dit Markov beslissingsprobleem respectievelijk de toestanden, de mogelijke beslissingen in een bepaalde toestand, de directe opbrengsten als functie van de toestand en de beslissing, en de overgangskansen.
b) Formuleer de optimaliteitsvergelijkingen voor de optimale-waardefunctie V(i).
c) Veronderstel dat de student voor de politiek kiest om nooit kortingsacties te organiseren. Laat met politiek-iteratie zien dat deze politiek niet optimaal is. Geef een betere politiek.

d) Voer twee slagen uit van het successieve-approximatie (*value iteration*) algoritme, d.w.z. bepaal $V_1(i)$ en $V_2(i)$, uitgaande van $V_0(i) = 0$. Bepaal in elke stap de bijbehorende kandidaat-strategie.

Opgave 3 (10 punten)

Het werkcollege SMOM op maandagochtend wordt slecht bezocht. Er zijn slechts 7 studenten aanwezig. Deze studenten zijn echter wel serieus bezig. Ze hebben regelmatig vragen die door de docent en de studentassistent (SA) volgens het FIFO principe worden beantwoord. Neem aan dat de door elke individuele student gestelde vragen gegenereerd worden door een Poisson proces met intensiteit λ per uur. Het beantwoorden van een vraag vergt een een negatief exponentieel verdeelde tijdsduur met een gemiddelde van μ^{-1} uur. In principe beantwoordt de docent de vragen. De SA zit achterin de zaal op haar laptop te werken aan een opdracht voor een van de modules van het nieuwe Twentse Onderwijs Model (TOM). Zodra er meer dan 3 vragen zijn (inclusief de vraag die op dat moment beantwoord wordt), dan doet de docent een beroep op de SA om even bij te springen. Zodra het aantal vragen weer is gereduceerd tot 3 (inclusief de vraag die op dat moment beantwoord wordt), gaat de SA verder met de ontwikkeling van de TOM-opdracht. Zonodig neemt de docent de vraag die de SA aan het beantwoorden was over, zodra het aantal vragen van 4 op 3 komt.

a) Teken een transitiediagram voor deze situatie.
b) Bepaal de evenwichtsvergelijkingen en bepaal hieruit de evenwichtskansen. Voor welke waarden van λ en μ is het systeem stabiel?

De antwoorden op de volgende vragen mogen uitgedrukt worden in λ, μ en de evenwichtskansen uit onderdeel b).

c) Wat is het gemiddelde aantal studenten van wie de vraag nog niet beantwoord is (dus inclusief de studenten van wie de vragen op dat moment beantwoord worden)?
d) Hoeveel vragen worden gemiddeld per uur beantwoord door de docent en SA samen?
e) Wat is de gemiddelde <u>wachttijd</u> van een student met een vraag?
f) Wat is de gemiddelde lengte van een interval waarin onafgebroken vragen worden beantwoord door de docent?

Opgave 4 (8 punten)

Beschouw een Markov keten met de volgende overgangskansen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Dit is een *ergodische* Markovketen. Leg uit wat de eigenschappen van zo'n Markovketen zijn, c.q. wat ergodisch betekent.
b) Bepaal de stationaire kansverdeling voor deze Markovketen.
c) Bepaal het verwachte aantal overgangen dat nodig is om vanuit toestand 1 voor het eerst toestand 3 te bereiken.

Beschouw de Markov keten nu als een gesloten netwerk. We spreken vanaf nu van stations in plaats van toestanden.
Neem aan dat er m jobs in het systeem aanwezig zijn.
Neem aan dat ieder station een enkele server heeft en dat in de wachtruimtes bij de stations plaats is voor alle aankomende jobs. De gemiddelde bedieningsrate (per tijdseenheid) in de verschillende stations bedraagt resp. $\mu_1 = 4/5$, $\mu_2 = 1/2$, $\mu_3 = 4/5$ en $\mu_4 = 3$.

d) Bepaal m.b.v. *mean value analysis* de gemiddelde verblijftijd van een job bij elk van de 4 stations en het gemiddelde aantal jobs bij elk van de 4 stations in het geval dat $m = 2$.
e) Wat is het gemiddelde aantal jobs dat per uur wordt afgehandeld bij machine 3?