FACULTEIT BEDRIJF, BESTUUR en TECHNOLOGIE
Kenmerk: OMPL05.030/lw
Datum: 10 juni 2005

TENTAMEN STOCHASTISCHE MODELLEN IN OPERATIONS MANAGEMENT (153088)

Dinsdag 14 juni 2005, 13.30-16.30 uur

Opmerkingen vooraf:

1. Gelieve (voor de cijferregistratie) het blok **bovenaan** het antwoordformulier in te vullen, inclusief studentnummer, opleiding en vakcode.
2. Het gebruik van boeken, syllabi, **grafische rekenmachines** of aantekeningen is **niet** toegestaan bij dit tentamen. Een eenvoudige rekenmachine is wel toegestaan.
3. Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven.
4. De score voor dit tentamen is gelijk aan (aantal behaalde punten+4)/4.
5. **Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd en waar nodig van een berekening te worden voorzien.**

Opgave 1 (7 punten)

Een student die weinig slaap nodig heeft, moet het volgende kwartiel voor zijn afstuderen nog 3 lastige vakken afronden, zeg A, B en C. Hij heeft een inschatting gemaakt van de kansen dat hij een bepaald vak zal halen als functie van de tijd die hij er in investeert. Naast zijn werk bij Stress en AH en zijn sociale verplichtingen heeft de student per week toch nog 5 dagen beschikbaar voor studie. Hij kan aan een vak wekelijks 0, 1,..., 5 dagen besteden. Neem aan dat het aantal dagen dat hij aan een bepaald vak besteedt van week tot week hetzelfde is (dus bijvoorbeeld: hij besteedt een kwartiel lang 2 dagen aan vak A elke week). De slaagkansen voor een bepaald vak bij de verschillende niveau's van inspanning staan in de volgende tabel:

Aantal dagen	Slaagkans A	Slaagkans B	Slaagkans C
0	.20	.25	.10
1	.40	.50	.30
2	.60	.60	.45
3	.75	.70	.55
4	.80	.75	.65
5	.85	.80	.70

De student wil zijn tijd zodanig over de vakken verdelen dat de kans dat hij geen enkel vak haalt zo klein mogelijk is.
Los dit probleem op met stochastische dynamische programmering.

Hint

Kies: Fase t = vak t (t=1=A, t=2=B, t=3=C)

a) Formuleer het probleem als een stochastisch dynamisch programmeringsprobleem. Wat kies je, bij bovenstaande keuze voor de fasen, als:
   - toestanden
   - beslissingen
   - optimale-waardefunctie.
b) Geef de recurrente betrekking voor de optimale-waardefunctie.
c) Los het probleem op via dynamische programmering. (Er hoeft geen *policy table* gegeven te worden.)

Opgave 2 (10 punten)
In een magazijn wordt van een bepaald artikel een kleine voorraad aangehouden van maximaal 2 stuks. Aan het eind van elke week wordt de voorraad geteld en wordt beslist of er bijbesteld moet worden en zo ja, hoeveel stuks. De bestelling wordt onmiddellijk afgeleverd. De kosten van een bestelling bestaan uit een vast bedrag van 80, vermeerderd met 80 per bestelde eenheid. De vraag per week is stochastisch en wel 0 met kans ¼, 1 met kans ½ en 2 met kans ¼. Indien de vraag groter is dan de voorraad wordt het tekort direct door de fabriek nageleverd. Dit kost 240 per eenheid. De voorraadkosten zijn 0 onafhankelijk van de voorraadhoogte. De beginvoorraad is 0.
Men vraagt zich af wat een optimale voorraad- en bestelstrategie is die de verwachte verdisconteerde kosten over een oneindige horizon minimaliseert. Het bedrijf hanteert een verdisconteringsfactor van 0.8 per week.

a) Bepaal voor dit Markov beslissingsprobleem respectievelijk de toestanden, de mogelijke beslissingen in een bepaalde toestand, de directe kosten als functie van de toestand en de beslissing, en de overgangskansen.
b) Formuleer de optimaliteitsvergelijking voor de optimale-waardefunctie V(i).
c) Voer twee slagen uit van het successieve-approximatie (*value iteration*) algoritme, d.w.z. bepaal $V_1(i)$ en $V_2(i)$, uitgaande van $V_0(i) = 0$. Bepaal in elke stap de bijbehorende kandidaat-strategie.
d) Wat zijn de verwachte verdisconteerde kosten vanuit beginvoorraad 0 bij gebruik van de strategie (2,0,0), d.w.z. 2 bestellen bij voorraad 0 en bij andere beginvoorraden niets bestellen?
e) Welke stappen zijn nodig om via *policy iteration* te bepalen of de strategie uit d) optimaal is? (Je hoeft deze stappen niet door te rekenen.)

Opgave 3 (12 punten)
Het werkcollege SMOM vindt plaats in een grote collegezaal. Voor het beantwoorden van vragen zijn de docent (Leo) en zijn studentassistente Gwendolyn aanwezig. De tijd tussen 2 tijdstippen waarop een student(e) te kennen geeft graag hulp te hebben door zijn of haar vinger op te steken, is negatief exponentieel verdeeld met een gemiddelde van 3 minuten.
Als er vier studenten zijn met een vraag (twee die geholpen worden en twee die op hulp wachten), dan zien andere studenten af van het vragen om hulp. Het beantwoorden van een vraag door Leo respectievelijk Gwendolyn vergt een negatief exponentieel verdeelde

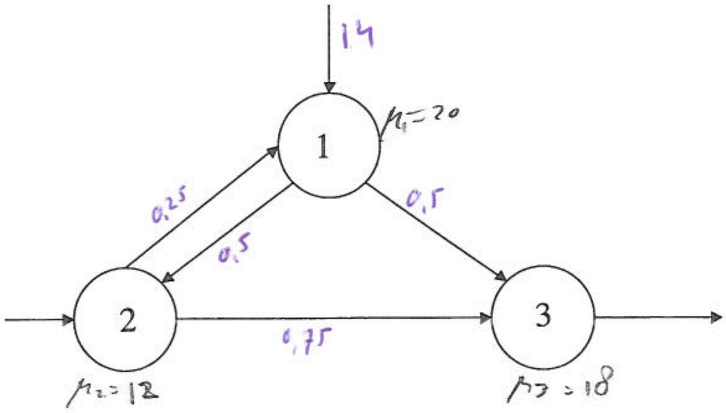
tijdsduur met een gemiddelde van 2 respectievelijk 4 minuten. Indien Leo en Gwendolyn beide niet bezig zijn met het beantwoorden van vragen, dan worden de eerst binnenkomende vragen op fifty-fifty-basis verdeeld tussen hen.

a) Teken een transitiediagram voor deze situatie.
b) Bepaal de evenwichtsvergelijkingen en bepaal hieruit de evenwichtskansen.

De antwoorden op de volgende vragen mogen uitgedrukt worden in de evenwichtskansen uit onderdeel b).

c) Hoeveel minuten moet een student(e) gemiddeld wachten tot Leo of Gwendolyn tijd heeft om de vraag te beantwoorden?
d) Hoeveel studenten per uur zien naar verwachting af van het stellen van een vraag?
e) Welke fractie van de tijd is Gwendolyn gemiddeld bezig met het beantwoorden van vragen?
f) Hoeveel vragen beantwoordt Leo gemiddeld per uur?
g) Wat is de gemiddelde lengte van een periode waarin Leo continu vragen beantwoordt?

Opgave 4 (7 punten)
Beschouw het onderstaande open wachtrijnetwerk met negatief exponentieel verdeelde bewerkingstijden en Poisson-aankomstprocessen bij station 1 en 2.



De aankomstintensiteit bij station 1 is 14 jobs per uur. Neem aan voorlopig (in onderdeel a) t/m d)) dat er bij station 2 geen jobs binnenkomen. De overgangskansen zijn als volgt: $r_{12} = r_{13} = 0.5$, $r_{21} = 0.25$, $r_{23} = 0.75$. Het gemiddelde aantal jobs dat bewerkt kan worden per uur bij stations 1, 2 en 3 bedraagt respectievelijk 20, 12 en 18 jobs.

a) Geef de stroomvergelijkingen en los deze op. Laat zien dat aan de stationariteitsvoorwaarde is voldaan.
b) Geef de kansverdeling van de wachtrijlengte bij station 3.

c) Wat is de bezettingsgraad van station 2?

d) Wat is de gemiddelde verblijftijd van een job in het systeem?

e) Veronderstel nu dat er ook jobs bij station 2 het netwerk binnenkomen en wel met intensiteit r_2 jobs per uur. Becommentarieer de volgende stelling: "De minimale waarde van r_2 waarvoor niet meer aan de stationariteitsvoorwaarde is voldaan is $r_2 = 4$ jobs per uur".