Universiteit Twente

Kenmerk: TW01/T-DW&MP/32/dh

Tentamen Operationele Research II (158006)
Woensdag 9 januari 2002, 13.30 – 16.30

1. Anand speelt tegen Kramnik twee schaakpartijen. Een gewonnen partij levert 1 punt op, een remise $\frac{1}{2}$ punt. Nadat de twee partijen zijn gespeeld is degene met de meeste punten uiteraard de winnaar. Eindigen beide spelers gelijk, dan wordt net zo lang doorgespeeld totdat één van de twee spelers heeft gewonnen.
In iedere partij kan Anand kiezen uit twee speelwijzen: agressief of behoudend. Speelt hij agressief dan wint hij de partij met kans 0.45 en verliest met kans 0.55. Speelt hij behoudend dan maakt hij remise met kans 0.9 en verliest met kans 0.1. (Er wordt geen onderscheid gemaakt tussen het spelen met de witte of zwarte stukken).
Anand's doel is het maximaliseren van de kans dat hij de winnaar wordt. [De uitkomsten van de opvolgende partijen zijn onderling onafhankelijk, zodat kansen vermenigvuldigd mogen worden].

   (a) Hoe groot is de maximale kans voor Anand om te winnen, indien beide spelers na de twee partijtjes evenveel punten hebben en welke speelwijze moet Anand hiervoor kiezen.

   (b) Bepaal Anand's optimale speelstrategie *m.b.v. dynamische programmering* [Aanwijzing: Kies als toestanden de uitkomsten van de reeds gespeelde partij(en), (indien van toepassing). Bedenk dat de optimale waardefunctie de maximale kans voor Anand is om winnaar te worden gegeven de fase en de toestand.]

   (a) Hoe groot is de maximale kans en wat is de optimale speelwijze in de eerste partij.

2. Iedere zaterdagavond speelt een man poker, zeer tot ongenoegen van zijn vrouw. Als hij haar voorafgaand aan het pokeren uit eten neemt (kosten fl.56,–) zal zij met kans $\frac{7}{8}$ volgende week zaterdag in een goed humeur zijn en met kans $\frac{1}{8}$ in een slecht humeur, ongeacht het humeur dat ze deze zaterdag heeft; neemt hij haar vooraf echter niet uit eten, dan zijn deze kansen, respectievelijk, $\frac{1}{8}$ en $\frac{7}{8}$. Is zij in een slecht humeur en gaat hij niet met haar uit eten, dan gaat ze naar een boetiek en koopt voor fl.200,– nieuwe kleren.

   (a) Geef de optimaliteitsvergelijking(en) in het geval de man de verwachte verdisconteerde kosten over een oneindige horizon wil minimaliseren (disconteringsfactor α). Geef de definitie van de optimale waardefunctie, de beslisruimte en de toestandsruimte.

(b) Bepaal de optimale politiek en de optimale waardefunctie m.b.v. politiek-iteratie voor $\alpha = \frac{4}{5}$.

(c) Geef een L.P.-model voor dit probleem en los dit grafisch op. Controleer hiermee het antwoord in (b).

3. Bij een wachtsysteem arriveren groepjes klanten volgens een Poissonproces met intensiteit $\lambda = 3$ groepjes/uur. De groepsgrootte is stochastisch: met kans $p = \frac{1}{2}$ bevat een "groepje" slechts één klant met en met kans $1 - p = \frac{1}{2}$ bestaat een groepje uit 2 klanten.

   Het wachtsysteem bezit twee identieke parallelle servers (loketten) en één wachtplaats (er kunnen dus maximaal drie klanten in het syteem zijn). Een arriverend groepje van twee klanten wordt alleen tot het systeem toegelaten mits er plaats is voor beide klanten, anders vertrekken beide klanten onmiddelijk en komen nooit meer terug. Uiteraard zal een individueel arriverende klant (= groepje ter grootte 1) welke het systeem vol aantreft ook verloren gaan.
   Klanten worden individueel bediend. De bedieningsduur is negatief exponentieel verdeeld met verwachtingswaarde $\mu^{-1} = \frac{1}{2}$ uur.

   (a) Hoeveel klanten arriveren gemiddeld per uur bij het systeem?

   (b) Geef het overgangsintensiteitendiagram (behorend bij het totaal aantal klanten in het systeem).

   (c) Geef de evenwichtsvergelijkingen voor stationaire kansverdeling P_n, $n = 0, 1, 2, 3$, van het aantal klanten in het systeem en los ze op.

   De antwoorden op de volgende vragen hoeven niet te worden uitgerekend, maar kunnen uitgedrukt worden in λ, μ, p en de P_n's.

   (d) Hoe groot is het gemiddeld aantal klanten dat per uur wordt bediend.

   (e) Geef een uitdrukking voor de gemiddelde wachttijd.

   (f) Wat is de verdeling van de lengte van een periode waarin het systeem leeg is. Verklaar uw antwoord.

   (g) Met welke intensiteit (klanten/uur) komen klanten het systeem binnen welke in groepjes van 2 arriveren.

Vol Maart '98

9 - 1 - 2002

Opg. 1.

(a) 0.45 ; speelwijze : aggressief

(b) $f_2(1\tfrac{1}{2}) = 1$

$f_2(1) = 0.45$

$f_2(\tfrac{1}{2}) = f_2(0) = 0$

$$\boxed{f_1(i) = \max \begin{cases} 0.9\, f_2(i+\tfrac{1}{2}) + 0.1\, f_2(i) & [\text{beh}] \\ 0.45\, f_2(i+1) + 0.55\, f_2(i) & [\text{agr}] \end{cases}}$$

$$f_1(i) = \max \begin{cases} 0.9\, f_2(i+\tfrac{1}{2}) + 0.1\, f_2(i) & [\text{behoudend}] \\ 0.45\, f_2(i+1) + 0.55\, f_2(i) & [\text{aggressief}] \end{cases} \quad (i = \#\text{behaalde punten})$$

$$f_1(1) = \max \begin{cases} 0.9\, f_2(\tfrac{3}{2}) + 0.1\, f_2(1) = 0.945 & [b] \\ 0.45\, f_2(2) + 0.55\, f_2(1) = 0.6975 & [a] \end{cases}$$

$$= 0.945 \quad [\text{behoudend}]$$

$$f_1(\tfrac{1}{2}) = \max \begin{cases} 0.9\, f_2(1) + 0.1\, f_2(\tfrac{1}{2}) = 0.405 & [b] \\ 0.45\, f_2(\tfrac{3}{2}) + 0.55\, f_2(\tfrac{1}{2}) = \underline{0.45} & [a] \end{cases}$$

$$= 0.45 \quad [a]$$

$$f_1(0) = \max \begin{cases} 0.9\, f_2(\tfrac{1}{2}) + 0.1\, f_2(0) = 0 & [b] \\ 0.45\, f_2(1) + 0.55\, f_2(0) = 0.2025 & [a] \end{cases}$$

$$= 0.2025 \quad [a]$$

$$f_0(0) = \max \begin{cases} 0.9\, f_1(\tfrac{1}{2}) + 0.1\, f_1(0) = 0.42525 & [b] \\ 0.45\, f_1(1) + 0.55\, f_1(0) = 0.5366 & [a] \end{cases}$$

(c) Gevr. max. kans is dus 0.5366

Eerste partij : aggressief spelen.

Ook 13-8-'97 9-1-2002

Opgave 2

(a) Toestandsruimte $\{g, s\}$

Actieruimte $\{0, 1\}$ 0 = niet uit eten 1 = wel uit eten

V_g, V_s optimale waardefunctie: verwachte verdisconteerde kosten indien de begintoestand (in periode 1) g (s) is.

$$V_g = \min \begin{cases} 56 + \alpha \{ \frac{7}{8} V_g + \frac{1}{8} V_s \} \\ \alpha \{ \frac{1}{8} V_g + \frac{7}{8} V_s \} \end{cases}$$

$$V_s = \min \begin{cases} 56 + \alpha \{ \frac{7}{8} V_g + \frac{1}{8} V_s \} \\ 200 + \alpha \{ \frac{1}{8} V_g + \frac{7}{8} V_s \} \end{cases}$$

(b) $\delta_1(g) = 0$ $\delta_1(s) = 1$ $\pi_1 = (\delta_1, \delta_1, \dots)$ [startpolitiek]

$$\left. \begin{aligned} V_g^1 &= \frac{8}{10} \{ \frac{1}{8} V_g^1 + \frac{7}{8} V_s^1 \} \\ V_s^1 &= 56 + \frac{8}{10} \{ \frac{7}{8} V_g^1 + \frac{1}{8} V_s^1 \} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} V_g^1 &= \frac{245}{2} \\ V_s^1 &= \frac{315}{2} \end{aligned}$$ [waardebepaling]

verbeteringsstap:

toestand g:

$$\min \begin{cases} 56 + \frac{8}{10} \{ \frac{7}{8} \cdot \frac{245}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{315}{2} \} = \frac{315}{2} \\ \frac{8}{10} \cdot \{ \frac{1}{8} \cdot \frac{245}{2} + \frac{7}{8} \cdot \frac{315}{2} \} = \frac{245}{2} \leftarrow ! \end{cases}$$

$\delta_2(g) = 0$

13-8-'97 9-1-2002

toestand s :

$$\min \begin{cases} 56 + \frac{8}{10}\left\{ \frac{7}{8} * \frac{245}{2} + \frac{1}{8} * \frac{315}{2} \right\} = \frac{315}{2} \leftarrow \\ 200 + \frac{8}{10}\left\{ \frac{1}{8} * \frac{245}{2} + \frac{7}{8} * \frac{315}{2} \right\} = \frac{645}{2} \end{cases}$$

$$\delta_2(s) = 1$$

<u>stopcriterium</u> :

$$\delta_1(g) = \delta_2(g) \text{ en } \delta_2(s) = \delta_1(s) \Rightarrow \pi_1 \text{ optimaal !}$$

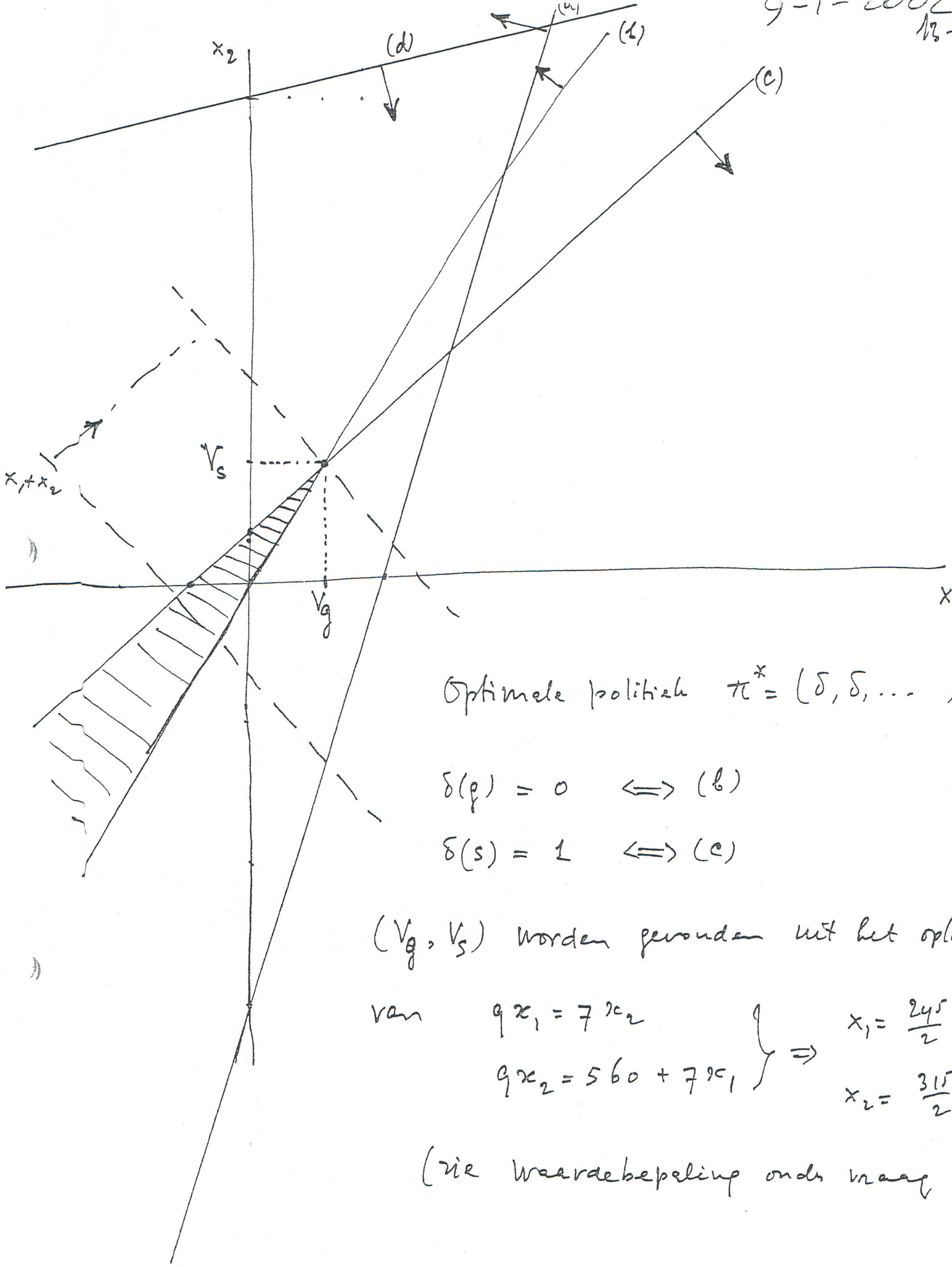
en $V_g = \frac{245}{2}$ en $V_s = \frac{315}{2}$

(c) Het LP-model luidt

$$\max \quad x_1 + x_2$$

$x_1 \leq 56 + \frac{7}{10}x_1 + \frac{1}{10}x_2$	$3x_1 \leq 560 + x_2$ (a)
$x_1 \leq \frac{1}{10}x_1 + \frac{7}{10}x_2$	$9x_1 \leq 7x_2$ (b)
$x_2 \leq 56 + \frac{7}{10}x_1 + \frac{1}{10}x_2$	$9x_2 \leq 560 + 7x_1$ (c)
$x_2 \leq 200 + \frac{1}{10}x_1 + \frac{7}{10}x_2$	$3x_2 \leq 2000 + x_1$ (d)

9-1-2002
13-8-'97



Optimale politiek $\pi^* = (\delta, \delta, \dots)$

$\delta(g) = 0 \iff (b)$

$\delta(s) = 1 \iff (c)$

(V_g, V_s) worden gevonden uit het oplossen

van
$$\left.\begin{aligned} 9x_1 &= 7x_2 \\ 9x_2 &= 560 + 7x_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{245}{2} \\ x_2 &= \frac{315}{2} \end{aligned}$$

(zie waardebepaling onder vraag (b))

[vervolg opg. 1] 16-6-95 5

9-1-2002

$$f_1(80) = \max\{80,\ (1-p)f_2(60) + p\, f_2(100)\}$$

$$= \max\{80,\ 72 + 40p\}$$

opt. beslissing op dag 1 : verkopen als $80 > 72 + 40p \Rightarrow 0 \le p < \frac{1}{5}$

indifferent " $p = \frac{1}{5}$

niet verkopen als $1 \ge p > \frac{1}{5}$

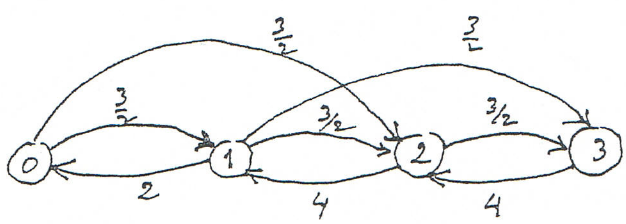
voor $p = \frac{1}{4}$ is $f_1(80) = 82$. □

---

opg 2.

(a) $1 \cdot p\lambda + 2(1-p)\lambda = \frac{1}{2} \cdot 3 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = 4\frac{1}{2}$ /uur.

(b)



(c) $3P_0 = 2P_1$ (1)

$5P_1 = \frac{3}{2}P_0 + 4P_2$ (2) $\left(\sum_{i=0}^{3} P_i = 1\right)$

$\frac{11}{2}P_2 = \frac{3}{2}(P_0 + P_1) + 4P_3$ (3)

$4P_3 = \frac{3}{2}(P_1 + P_2)$ (4)

$(1) \Rightarrow P_1 = \frac{3}{2}P_0$

$(1) + (2) \Rightarrow \frac{15}{2}P_0 = \frac{3}{2}P_0 + 4P_2 \rightarrow 6P_0 = 4P_2 \Rightarrow P_2 = \frac{3}{2}P_0$

$(1) + (2) + (4) \Rightarrow 4P_3 = \frac{3}{2} * 3P_0 \Rightarrow P_3 = \frac{9}{8}P_0$

$\sum P_i = 1 \Rightarrow P_0\left(1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{9}{8}\right) = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{8}{41}$

$$\boxed{P_0 = \frac{8}{41},\ P_1 = P_2 = \frac{12}{41},\ P_3 = \frac{9}{41}}$$