twt faculteit
toegepaste wiskunde

Kenmerk: TW02/SOR/153/tk
Datum: 8 augustus 2002

# Tentamen Operationele Research II (158006)
## Woensdag 14 augustus 2002 van 9.00 – 12.00 uur

Deze toets bestaat uit 3 opgaven.
Vermeld ook uw studentnummer op uw werk.

1. De tweelingzusjes Gwynneth en Mayfannaw runnen samen een vertaalbureau. Een van hun projecten is het vertalen van klassieke Engelse dichters in het Welsh. Van de twee zusjes is Gwynneth de meest doortastende. Zij neemt alle zakelijke beslissingen. Mayfannaw daarentegen heeft een zachtaardige, ietwat dociele natuur en gehoorzaamt blindelings haar tweelingzus. Mayfannaw is een voortreffelijk vertaler. Het bureau drijft dan ook volledig op haar vertaaltalent. Een complicatie vormt de zwakke gezondheid van Mayfannaw. Grof gezegd kan haar conditie drie grondvormen aannemen: uitstekend, goed of slecht. Het merkwaardige is, dat haar conditie gedurende iedere week van maandag tot en met vrijdag stabiel blijft om dan de eerstvolgende maandag volgens een stochastisch patroon te veranderen. Een door Gwenneth ingehuurde statisticus vond de volgende wetmatigheden:

   - Als de conditie van Mayfannaw deze week uitstekend is, dan is de conditie de week daarop met kans 0.7 weer uitstekend, met kans 0.2 goed en met kans 0.1 slecht.
   - Als de conditie van Mayfannaw deze week goed is, dan is de conditie de week daarop met kans 0.7 weer goed en met kans 0.3 slecht.
   - Als de conditie van Mayfannaw deze week slecht is, dan is de conditie de week daarop met kans 0.1 goed en met kans 0.9 slecht.

   Uiteraard hangen de inkomsten van het vertaalbureau nauw samen met de conditie van Mayfannaw. Is Mayfannaw in uitstekende conditie, dan bedragen de netto inkomsten 1000 per week. Is haar conditie goed, dan bedragen deze inkomsten nog altijd 700 per week. Echter, is Mayfannaw er slecht aan toe, dan bedragen de nette inkomsten slechts 200 per week.

   Gelukkig is er een lichtpuntje. Gwynneth heeft ontdekt, dat, indien zij Mayfannaw voor een week naar het ongerepte Cornwall stuurt om bij te tanken, dit gunstige gevolgen heeft voor haar welbevinden. Na zo'n week ontspanning keert Mayfannaw de eerstvolgende maandag als volgt terug: met kans 0.8 is haar conditie uitstekend en met kans 0.2 is haar conditie goed. Dit resultaat is onafhankelijk van de toestand waarin zij naar Cornwall vertrok. Omdat Gwynneth haar zuster vergezelt, zijn er tijdens een week Cornwall geen inkomsten. Integendeel, zo'n week kost 450.

   Iedere maandag om 9.00 uur beslist Gwynneth of het duo die week naar Cornwall gaat of niet. Het is nu het maandagochtend 9.00 uur van week 45. Gwynneth heeft zojuist geconstateerd, dat de conditie van Mayfannaw slecht is. De vraag is nu, welke beslissingsstrategie Gwynneth moet volgen om ervoor te zorgen dat de totale verwachte netto inkomsten gedurende de weken 45, 46, 47 en 48 maximaal is.

   1 2 3 4

Z.O.Z

a. Formuleer het probleem als een stochastisch dynamisch programmeringsprobleem.
2 Wat kiest u als
1 i. fasen (beslissingstijdstippen)
ii. toestanden
iii. beslissingen
1 iv. optimalewaardefunctie

2 b. Geef de recurrente betrekking voor de optimalewaardefunctie.

6 c. Bepaal (via dynamische programmering) de oplossing van het probleem.

2. Een wasmiddelenfabrikant maakt regelmatig gebruik van marketing-acties, in de vorm van reclame op televisie. De fabrikant weet uit ervaring dat reclamespots de omzet op korte termijn sterk kunnen beïnvloeden. Om precies te zijn: de omzet in week $n+1$ is afhankelijk van de omzet in week $n$, en eventuele reclamespots in week $n+1$ (zie tabel).

| | omzet week $n+1$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | wel reclame | | | geen reclame | | |
| omzet week $n$ | hoog | normaal | laag | hoog | normaal | laag |
| hoog | 1 | 0 | 0 | 0,7 | 0,3 | 0 |
| normaal | 0,8 | 0,2 | 0 | 0,3 | 0,4 | 0,3 |
| laag | 0,6 | 0,3 | 0,1 | 0 | 0,3 | 0,7 |

*Matrix met overgangskansen*

De fabrikant wil onderzoeken wanneer marketing-acties lonend zijn, en wanneer niet. De kosten van reclamespots bedragen 100.000 Euro per week. De verwachte opbrengsten bij een hoge, normale en lage omzet bedragen respectievelijk 200.000, 100.000 en 50.000 Euro per week. Doelstelling is een maximale verwachte verdisconteerde winst over een oneindige tijdshorizon, bij een verdisconteringsfactor van 0,95 per week.

1 a. Er is hier sprake van een Markov beslissingsprobleem. Wat definieert u als toestandsruimte en beslissingsruimte?

1 b. Bepaal voor alle mogelijke toestanden $i$ en beslissingen $d$ de verwachte directe winst $r(i,d)$ over de komende week.

3 c. Formuleer de optimaliteitsvergelijkingen.

De fabrikant zendt al jarenlang, week in week uit, reclamespots uit op televisie.

3 d. Laat m.b.v. de policy-iteratie methode zien dat de door de fabrikant gehanteerde strategie niet optimaal is.

2 e. Geef een LP-formulering waarmee de optimale strategie kan worden bepaald.

3. Op de afdeling klantenservice van een grootwinkelbedrijf zijn twee loketten ingericht om de klachten van klanten af te werken. De bedieningsduur is negatief exponentieel verdeeld met verwachting $(1/\mu)$ uur voor elk van de loketten.

Het aankomstproces is als volgt. Per uur vinden bij de afdeling gemiddeld $\lambda = 6$ aankomsten plaats volgens een Poissonproces. Deze aankomsten betreffen in de helft van de gevallen een individuele klant. In de andere helft van de gevallen komen gelijktijdig *twee* klanten aan. Komt een groepje van twee klanten aan op een moment dat één of beide loketten bezet zijn, dan gaan beide klanten de afdeling niet binnen, maar verlaten ogenblikkelijk de zaak. Een individueel arriverende klant die beide loketten bezet aantreft, gaat de afdeling niet binnen, maar vertrekt spoorslags.
Overigens wordt – ongeacht de aankomstwijze – iedere klant die de afdeling binnengaat afzonderlijk bediend en wel door precies één van de loketten. Gegeven is verder dat, in de evenwichtssituatie, de afdeling gemiddeld 10 procent van de tijd geen klanten bevat.
Het bovenbeschreven systeem is op te vatten als een variant van een 2 loketten-verlies-systeem, d.w.z. zonder wachtruimte.

3 a. Teken een plaatje van de toestandsruimte met de overgangsintensiteiten.
1 b. Stel de evenwichtsvergelijkingen op.
1 c. Bepaal de evenwichtskans op $k$ klanten in het systeem ($k = 0,1,2$).
1 d. Bereken $\mu$.
1 e. Bepaal het verwachte aantal klanten in het systeem in de evenwichtstoestand.
1 f. Hoe luidt de formule van Little? Geef een duidelijke definitie van de grootheden.
1 g. Hoeveel tijd heeft naar verwachting een klant die bediening ontvangt in het systeem doorgebracht?
1 h. Bepaal de doorzet van het systeem (d.w.z. het gemiddeld aantal klanten per uur dat het systeem binnengaat en bediend wordt).

Opgave 1 [5-11-93] / 14-8-'62

(i) (a) fasen = weeknr 1, 2, 3 en 4 [= 45, 46, 47, 48]

(b) toestanden : {u, g, s} = {1, 2, 3}

(c) beslissing : a = 0 [= niet naar C]

a = 1 [= wel naar C]

(d) $f_n(\breve{s})$ = max. verwachte opbrengst in de weken n, n+1, ..., 4 indien de toestand aan begin week n $\breve{s}$ is met $\breve{s}$ = u, g of s.

(ii) De overgangskansen afhankelijk van de beslissing zijn

$$P(0) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{en} \quad P(1) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.8 & 0.2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

De opbrengsten per week $r(i,a)$ zijn:

$r(1,0) = 1000$, $r(2,0) = 700$, $r(3,0) = 200$

$r(i,1) = -450$, $i = 1, 2, 3$

In 't algemeen geldt

$$f_n(i) = \max_{a \in \{0,1\}} \left\{ r(i,a) + \sum_{j=1}^{3} P_{ij}(a) f_{n+1}(j) \right\}, \quad n = 1, 2, 3, \quad i = 1, 2, 3$$

$$f_4(i) = \max_{a \in \{0,1\}} \{ r(i,a) \}$$

14/8/02 5/11/93

(iii) $f_4(1) = 1000$ $[a^* = 0]$

$f_4(2) = 700$ $[a^* = 0]$

$f_4(3) = 200$ $[a^* = 0]$

$$f_3(1) = \max\{ r(1,0) + P_{11}(0) f_4(1) + P_{12}(0) f_4(2) + P_{13}(0) f_4(3), \; r(1,1) + P_{11}(1) f_4(1) + P_{12}(1) f_4(2) + P_{13}(1) f_4(3) \}$$

$$= \max\{ 1000 + \tfrac{7}{10}\cdot 1000 + \tfrac{2}{10}\cdot 700 + \tfrac{1}{10}\cdot 200, \; -450 + \tfrac{8}{10}\cdot 1000 + \tfrac{2}{10}\cdot 700 \} = 1860 \quad [a^* = 0]$$

$$f_3(2) = \max\{ 700 + \tfrac{7}{10}\cdot 700 + \tfrac{3}{10}\cdot 200, \; -450 + \tfrac{8}{10}\cdot 1000 + \tfrac{2}{10}\cdot 700 \} = 1250 \quad [a^* = 0]$$

$$f_3(3) = \max\{ 200 + \tfrac{1}{10}\cdot 700 + \tfrac{9}{10}\cdot 200, \; -450 + \tfrac{8}{10}\cdot 1000 + \tfrac{2}{10}\cdot 700 \} = 490 \quad [a^* = 1]$$

---

$$f_2(1) = \max\{ 1000 + \tfrac{7}{10}\cdot 1860 + \tfrac{2}{10}\cdot 1250 + \tfrac{1}{10}\cdot 490, \; -450 + \tfrac{8}{10}\cdot 1860 + \tfrac{2}{10}\cdot 1250 \} = 2601 \quad [a^* = 0]$$

$$f_2(2) = \max\{ 700 + \tfrac{7}{10}\cdot 1250 + \tfrac{3}{10}\cdot 490, \; -450 + \tfrac{8}{10}\cdot 1860 + \tfrac{2}{10}\cdot 1250 \} = 1822 \quad [a^* = 0]$$

$$f_2(3) = \max\{ 200 + \tfrac{1}{10}\cdot 1250 + \tfrac{9}{10}\cdot 490, \; -450 + \tfrac{8}{10}\cdot 1860 + \tfrac{2}{10}\cdot 1250 \} = 1288 \quad [a^* = 1]$$

---

$$f_1(3) = \max\{ 200 + \tfrac{1}{10}\cdot 1822 + \tfrac{9}{10}\cdot 1288, \; -450 + \tfrac{8}{10}\cdot 2601 + \tfrac{2}{10}\cdot 1822 \} = 1995,2 \quad [a^* = 1]$$

(29/11/96) 14/8/02

(2) (a) Toestandsruimte = { omzet afgelopen week }, dus

$S = \{ \text{hoog}, \text{normaal}, \text{laag} \}$

Beslisruimte = { wel, niet } reclame

$A = \{ \text{recl}, \text{geen} \}$

(b) $(r(i,d))$

| | | recl. | geen |
|---|---|---|---|
| i | hoog | 100 | 200 |
| | norm. | 0 | 100 |
| | laag | −50 | 50 |

$f_n(i) = r(i,d) + \beta ( \ldots f_{n-1}$

(c)

$$f(\text{hoog}) = \max \begin{cases} 100 + 0.95\, f(\text{hoog}) & [\text{recl.}] \\ 200 + 0.95 \left( \frac{7}{10} f(\text{hoog}) + \frac{3}{10} f(\text{norm}) \right) & [\text{geen}] \end{cases}$$

$$f(\text{norm.}) = \max \begin{cases} 0 + 0.95 \left\{ \frac{8}{10} f(\text{hoog}) + \frac{2}{10} f(\text{norm}) \right\} & [\text{recl.}] \\ 100 + 0.95 \left\{ \frac{3}{10} f(\text{hoog}) + \frac{4}{10} f(\text{norm}) + \frac{3}{10} f(\text{laag}) \right\} & [\text{geen}] \end{cases}$$

$$f(\text{laag}) = \max \begin{cases} -50 + 0.95 \left\{ \frac{6}{10} f(\text{hoog}) + \frac{3}{10} f(\text{norm}) + \frac{1}{10} f(\text{laag}) \right. & [\text{recl.}] \\ 50 + 0.95 \left\{ \frac{3}{10} f(\text{norm}) + \frac{7}{10} f(\text{laag}) \right. & [\text{geen}] \end{cases}$$

(d) strategie $\pi_1 = (\delta, \delta, \ldots)$, $\delta(\text{hoog}) = \text{recl.}$, $\delta(\text{norm}) = \text{recl.}$, $\delta(\text{laag}) = \text{rec}$

Waardebepaling: oplossen van het stelsel

$V_{\pi_1}(\text{hoog}) = 100 + 0.95\, V_{\pi_1}(\text{hoog})$

$V_{\pi_1}(\text{norm}) = 0.95 \left\{ \frac{8}{10} V_{\pi_1}(\text{hoog}) + \frac{2}{10} V_{\pi_1}(\text{norm}) \right\}$

$V_{\pi_1}(\text{laag}) = -50 + 0.95 \left\{ \frac{6}{10} V_{\pi_1}(\text{hoog}) + \frac{3}{10} V_{\pi_1}(\text{norm}) + \frac{1}{10} V_{\pi_1}(\text{laag}) \right\}$

14/6/02

oplossing: $V_{\pi_1}(\text{hoog}) = 2000$

$V_{\pi_1}(\text{norm.}) = 1876.5$

$V_{\pi_1}(\text{laag}) = 1795$

Verbeteringsstap:

Beschouw toestand 'hoog':

$$\max \begin{cases} 100 + 0.95\, V_{\pi_1}(\text{hoog}) = 2000 & [\text{red.}] \\ 200 + 0.95\left\{\frac{7}{10} \times 2000 + \frac{3}{10} \times 1876.5\right\} \approx \underline{\underline{2065}} & [\text{geen}] \end{cases}$$

$\delta_2(\text{hoog}) \neq \delta_1(\text{hoog}) \Rightarrow$ dus politiek <u>niet optimaal</u>!

(e) $\min \quad x_1 + x_2 + x_3$

$$x_1 \geq 100 + 0.95\, x_1$$
$$x_1 \geq 200 + 0.95\left\{\frac{7}{10} x_1 + \frac{3}{10} x_2\right\}$$
$$x_2 \geq 0.95\left\{\frac{8}{10} x_1 + \frac{2}{10} x_2\right\}$$
$$x_2 \geq 100 + 0.95\left\{\frac{3}{10} x_1 + \frac{4}{10} x_2 + \frac{3}{10} x_3\right\}$$
$$x_3 \geq -50 + 0.95\left\{\frac{6}{10} x_1 + \frac{3}{10} x_2 + \frac{1}{10} x_3\right\}$$
$$x_3 \geq 50 + 0.95\left\{\frac{3}{10} x_2 + \frac{7}{10} x_3\right\}$$

14/8/02

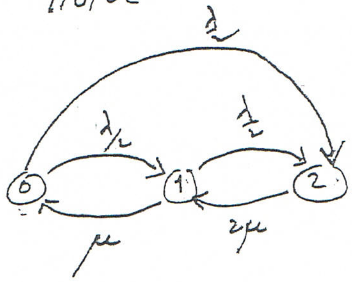
$\lambda = 6$

$\Leftrightarrow 5$

$\Leftrightarrow 3$

## Opg 3

(a)




(b)

$$\mu P_1 = \lambda P_0$$

$$\left(\mu + \tfrac{\lambda}{2}\right) P_1 = \tfrac{\lambda}{2} P_0 + 2\mu P_2$$

$$2\mu P_2 = \tfrac{\lambda}{2} P_0 + \tfrac{\lambda}{2} P_1 \quad , \text{ met } \sum_0^2 P_i = 1$$

$2\mu P_2 = \frac{\lambda}{2} P_0 + \frac{\lambda}{2} \cdot P_1$

$\Leftrightarrow \frac{\lambda}{2}(1+\rho)P_0$

c)

$$P_1 = \rho P_0 \qquad \left(\rho = \tfrac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$2\mu P_2 = \tfrac{\lambda}{2}(1 - P_2) \implies P_2 = \frac{\rho/4}{1 + \rho/4}$$

$$P_0 + P_1 = (1+\rho) P_0 = \frac{4\mu}{\lambda} P_2 = \frac{1}{1+\rho/4} \implies P_0 = \frac{1}{(1+\rho)(1+\frac{\rho}{4})}, \quad P_1 = \frac{\rho}{(1+\rho)(1+\frac{\rho}{4})}$$

d)

$$P_0 = \frac{1}{10} \qquad 10 = \frac{1}{4}\rho^2 + \frac{5}{4}\rho + 1$$

$$\rho^2 + 5\rho - 36 = 0 \implies (\rho - 4)(\rho + 9) = 0 \implies \rho = 4 \to \mu = \tfrac{3}{2}/\text{uur}$$

e)

$$P_1 + 2P_2 = \frac{4}{10} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1\frac{2}{5}$$

f) zie dikt~~aat~~

g) Er wordt niet gewacht dus is verblijftijd gemiddeld $\frac{1}{\mu}$

h) ~~Doorzet~~ : $\tilde{\lambda}$ , op verschillende manieren uit te rekenen

$$\tilde{\lambda} = \tfrac{\lambda}{2} P_0 + \tfrac{\lambda}{2} \cdot 2 \cdot P_0 + \tfrac{\lambda}{2} P_1 \qquad [\text{ intree-intensiteit }]$$

$$\tilde{\lambda} = \mu P_1 + 2\mu P_2 \qquad [\text{ uittree- of vertrekintensiteit }]$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{P_1 + 2P_2}{\frac{1}{\mu}} \qquad [\text{ Little! }]$$

$$\left(\tilde{\lambda} = \frac{21}{10}\right)$$