Universiteit Twente
de ondernemende universiteit

FACULTEIT BEDRIJF BESTUUR & TECHNOLOGIE
Kenmerk: OMPL02.0135/ev
Datum: 6 november 2002

Tentamen

Operationele Research II
(158006)

Plaats:

Datum: 18 november 2002

Tijd: 9.00 – 12.30 uur

Opgave 1: 20 p.

Een klein bio-medisch hightech bedrijfje produceert Renspeed voor paarden, die aan een paarden race deelnemen. Dit middel is biologisch afbreekbaar, officieel toegelaten, mits door een veearts toegediend en volgens ingewijden werkt het fantastisch. De vraag naar de betreffende ampullen is als volgt:

	maandag	dinsdag	woensdag	donderdag	vrijdag
D=1	0.7	0.7	0.7	0.7	
D=2	0.3	0.3	0.3	0.3	
D=3					0.2
D=4					0.6
D=6					0.2

Het bedrijf heeft een maximale productie capaciteit van 3 ampullen per dag. Als op een dag een batch geproduceerd wordt, neemt dat een de gehele dag in beslag. Daarna moet aan het begin van de volgende dag de batch getest worden. Dat kost 4 uur tijd. Met kans 0.1 moet de gehele batch worden vernietigd en met kans 0.9 is de batch geschikt voor verkoop. De productie kosten van een batch van omvang X zijn inclusief testen:

	X=0	X=1	X=2	X=3
kosten	0	200	250	280

Het product kan nadat het getest is op voorraad worden gehouden door het zeer diep gekoeld te bewaren, voor aflevering moet het dan op kamer temperatuur worden gebracht. Dit invries / ontdooi proces kost nauwelijks tijd. Als een batch uit voorraad wordt gehaald, wordt deze alsnog een keer getest op dezelfde wijze als een productierun en dit brengt alsnog een risico op afkeur van deze batch met zich mee van 0.2. Verdere voorraadkosten zijn verwaarloosbaar. De voorraad ruimte is beperkt tot 4 ampullen. Ampullen kunnen na ontdooiing niet ten tweede male worden ingevroren.
De leverantie aan een klant gebeurt per snelpost aan het eind van de dag. Indien de test uitslag goed is kunnen voor leverantie dus de productierun van de vorige dag en de batch uit voorraad van dezelfde dag worden gebruikt. Het uitgeleverde product is dan alleen de volgende dag bruikbaar. Als men niet kan leveren koopt men vliegensvlug het product bij een concurrent in en levert de zelfde avond nog na. Dit brengt naleveringskosten van 1000 per stuk met zich mee.
Het bedrijf is in het weekend gesloten. Daarom wordt de productie run van vrijdag op vrijdag avond / nacht getest en indien geschikt bevonden aan de voorraad toegevoegd, voor zover de ruimte dat toelaat.
Aan het begin van de maandag morgen heeft men 2 ampullen op voorraad. Bij de productie planning houdt men als regel aan dat de voorraad op zaterdag morgen gewaardeerd wordt tegen de verwachte nalever kosten van de volgende maandag als men zoveel mogelijk aan de vraag voldoet.

(a) Als toestandskarakterisering aan het begin van een dag werkt men met de begin voorraad I en de omvang van de productie run Y van de vorige dag, die nog getest moet worden. Als beslissingsvariabelen hanteert men de omvang van de productierun voor de huidige dag X en de omvang van de batch B die men uit de voorraad haalt.

- Welke toestanden zijn er mogelijk op dinsdag morgen?
- Beschouw dinsdagmorgen met I=1, Y=3 en X=2, B=1.
  - Wat verstaat u onder de verwachte directe kosten en hoe hoog zijn die hier?
  - Wat zijn respectievelijk de overgangskansen naar de volgende toestanden op woensdagmorgen: (1) I'=1, Y'=2 en (2) I'=0, Y'= 0 en (3) I'=0, Y'= 2

(b) Hoe definieert u de waarde functie $F_n(I,Y)$ dit geval?
Formuleer een recursie relatie voor deze waarde functie. Hoe vind u hiermee de optimale beslissingsstrategie? Gebruik hierbij in het algemene geval voor de directe kosten de notatie C(Y,X,B) en voor de transitie kansen de notatie $p_n(I',Y' \mid I,Y;X,B)$. Geef de volledige recursie relatie met de directe kosten kosten en overgangskansen in getallen waaraan $F_2(1,3)$ moet voldoen.

(c) Bereken de eindwaarden $F_6(I,0)$ voor de recursie. Welke beslissing neemt u in de situatie dat op vrijdag ochtend de toestand I=0,X=3 optreedt?

Opgave 2: 20 p.

Een wasmiddelenfabrikant maakt regelmatig gebruik van marketing-acties, in de vorm van reclame op televisie. De fabrikant weet uit ervaring dat reclamespots de omzet op korte termijn sterk kunnen beïnvloeden. Om precies te zijn: de omzet in week $n+1$ is afhankelijk van de omzet in week n, en eventuele reclamespots in week $n+1$ (zie tabel).

	omzet week $n+1$					
	wel reclame			geen reclame		
omzet week n	hoog	normaal	laag	hoog	normaal	laag
hoog	0.9	0.1	0	0,6	0,4	0
normaal	0,8	0,2	0	0	0,8	0,2
laag	0,6	0,4	0	0	0,3	0,7

Matrix met overgangskansen

De fabrikant wil onderzoeken wanneer marketing-acties lonend zijn, en wanneer niet. De kosten van reclamespots bedragen 80.000 gulden per week. De verwachte opbrengsten bij een hoge, normale en lage omzet bedragen respectievelijk 160.000, 80.000 en 20.000 gulden per week. Doelstelling is een maximale verwachte verdisconteerde winst over een oneindige tijdshorizon, bij een verdisconteringsfactor van 0,90 per week.

(a) Er is hier sprake van een Markov beslissingsprobleem. Wat definieert u als toestandsruimte en beslissingsruimte?

(b) Maak een tabel 3 bij 2 tabel van de verwachte directe winst $r(i,d)$ over de komende week.

(c) Formuleer de optimaliteitsvergelijkingen, waarbij u voor de overgangskansen de notatie $p(j;i,d)$ mag gebruiken.

't getal?

De fabrikant zendt al jarenlang een reclamespot~~s~~ uit op televisie *alleen* als de omzet in de vorige week *laag* was.

(d) Geef de vergelijkingen waaraan de netto contante waarde van deze politiek in elke begin toestand moet voldoen. U mag aannemen dat de oplossing van deze vergelijkingen gegeven wordt door v(1)=840, v(2)=730, v(3)=760. Laat m.b.v. de policy-iteratie methode zien dat de door de fabrikant gehanteerde strategie niet optimaal is.

(e) Geef een LP-formulering waarmee de optimale strategie kan worden bepaald.

Opgave 3 : 30 p.

Een chique tearoom is gevestigd als annex bij een luxe bakkerij in het oude centrum van de stad. Er zijn 2 tafeltjes, die elk geschikt zijn voor maximaal 2 personen. De tearoom kent 2 typen bezetting van een tafeltje: met een "single" (1 klant) of met een "couple" (2 bij elkaar horende klanten). Er arriveren volgens een Poisson proces gemiddeld 3 "singles" per uur. Evenzo arriveren er volgens een Poisson proces gemiddeld 3 "couples" (dus 2 klanten die bij elkaar horen tegelijkertijd) per uur. Dit zijn potentiële aankomsten in de zin dat de klanten doorlopen als beide tafeltjes bezet zijn. Een "single" heeft een exponentieel verdeelde verblijfsduur met een gemiddelde van 15 minuten. Een "couple" heeft een exponentieel verdeelde verblijfsduur met een gemiddelde van 20 minuten (gemiddeld langer dan "singles" omdat ze converseren). De gemiddelde besteding van een "single" is 8 euro, de gemiddelde besteding van een "couple" is 12 euro.

(a) Benoem de 6 verschillende toestanden waarin deze tearoom zich kan bevinden. Teken het bijbehorende toestandsdiagram.

(b) Leidt de vergelijkingen voor de evenwichtskansen af en los deze op.

(c) Wat is het gemiddeld aantal bezette tafeltjes? Wat is het gemiddeld aantal klanten in de tearoom?

(d) Welk percentage van de potentiële klanten loopt door omdat bij aankomst de beide tafeltjes bezet zijn?

(e) Wat is de gemiddelde omzet per uur van deze tearoom?

(f) Wat is het aantal klanten dat de tearoom per uur gemiddeld bedient? Wat is de gemiddelde verblijftijd van een klant?

(g) Als op een gegeven moment beide tafeltjes bezet zijn met "couples" wat is dan de kans dat er in de komende 10 minuten geen tafeltje vrijkomt? Hoe lang duurt het naar verwachting vanaf dat moment tot er een tafeltje vrijkomt?

Opgave 4: 20 p

Een speelhal kent 3 gecomputeriseerde spelletjes machines waaraan een persoon tegelijk kan spelen. Per uur arriveren van buiten volgens een Poisson proces gemiddeld 24 personen in de speelhal . Elke aankomende klant selecteert met kans 1/3 een van de machines om te beginnen en speelt daar zijn eerste spel. Daarna is het gedrag van een willekeurige klant als volgt: bij afloop van een spel op een bepaalde machine selecteert hij met kans 2/3 een van de andere 2 machines, met evenveel kans voor elk van de machines (1/3 dus), en met kans 1/3 verlaat hij de speelhal. De speelduur op elk van de machines is exponentieel verdeeld met een gemiddelde duur van 90 seconden.

(a) Teken een netwerk diagram voor de stromen in deze situatie en los de bijbehorende stroom vergelijkingen op.
(b) Wat is de bezettingsgraad van elk van de machines?
(c) Wat is de kans dat niemand in de wachtrij staat bij welke machine dan ook?
(d) Wat is de gemiddelde verblijftijd van een bezoeker van de speelhal?
(e) Hoeveel spelletjes doet een klant gemiddeld voordat hij de speelhal weer verlaat?

(c) gem # bezette tafels $= 1\cdot(P(1)+P(2)) + 2\,(P(1,1)+P(1,2)+P(2,2))$

$\bar{N}$ = gem # klanten $= 1\,(P(1) + 2\,(P(2)+P(1,1)) + 3\,P(1,2) + 4\,P(2,2)$

(d) $(3+6)\,(P(1,1)+P(1,2)+P(2,2))\,/\,\cancel{100\%}\,(3+6) \times 100\%$

(e) $\cancel{8\times 4\times P(1}$

$8\times 4\times P(1) + 8\times 8\times P(1,1) + 8\times 4\times P(1,2) + 12\times 3\times P(2) + 12\times 3\,P(1,2) + 12\times 6\times P(2,$

(f) $\bar{\lambda} = 4\,P(1) + 6\,P(2) + 8\,P(1,1) + \cancel{\#(P} 4\,P(1,2) + 6\,P(1,2) + 12\,P(2,2)$ = # bed. kl/uur.

gem. verblijftijd klant : Little : $\bar{\lambda}\bar{F} = \bar{N}$

$$\bar{F} = \frac{P(1) + 2\,(P(2)+P(1,1)) + 3\,P(1,2) + 4\,P(2,2)}{4P(1) + 6P(2) + 8\,P(1,1) + 10\,P(1,2) + 12\,P(2,2)}$$

(g) 1) : $e^{-\frac{1}{36}}$

2) : 10 minuten $= \frac{1}{6}$ uur

③ 18-11-02

a) 6 toestanden : (0): 2 lege tafels

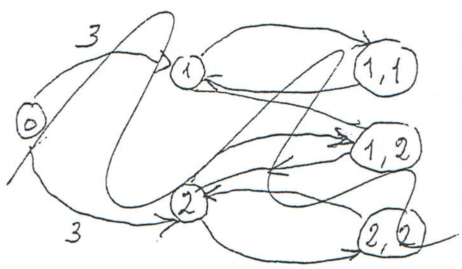
(1): 1 single

(1,1): 2 singles

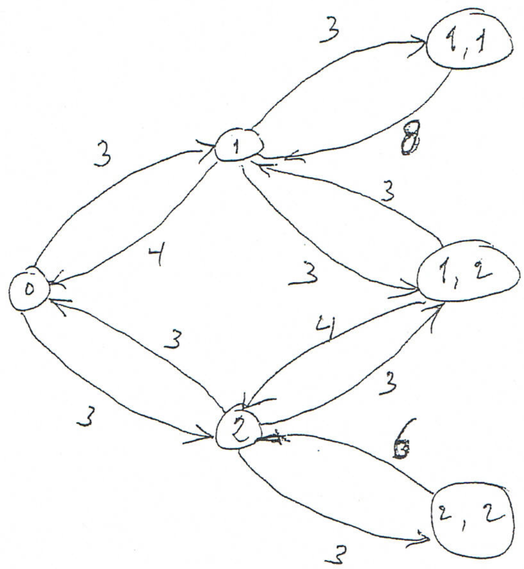
(2): 1 double

(2,2): 2 doubles

(1,2): 1 single + 1 double



intensiteiten per uur



(b)

$$6P(0) = 4P(1) + 3P(2)$$

$$10P(1) = 3P(0) + 8P(1,1) + 3P(1,2)$$

$$9P(2) = 3P(0) + 4P(1,2) + 6P(2,2)$$

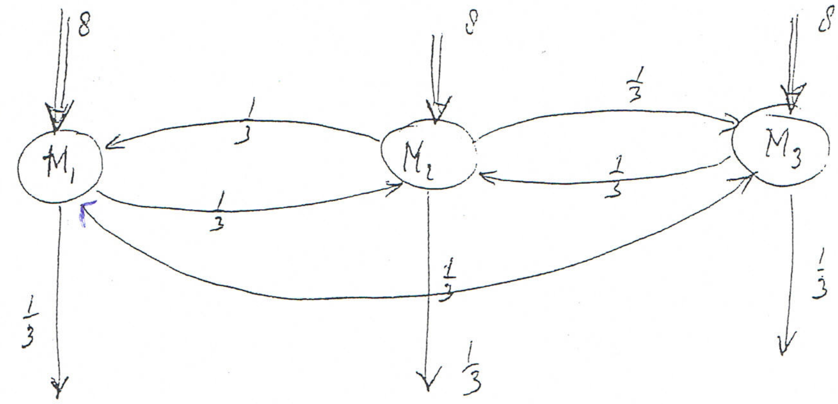
$$8P(1,1) = 3P(1)$$

$$7P(1,2) = 3P(1) + 3P(2)$$

$$6P(2,2) = 3P(2)$$

(4)

(a)



$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= 8 + \tfrac{1}{3}\lambda_2 + \tfrac{1}{3}\lambda_3 \\ \lambda_2 &= 8 + \tfrac{1}{3}\lambda_1 + \tfrac{1}{3}\lambda_3 \\ \lambda_3 &= 8 + \tfrac{1}{3}\lambda_1 + \tfrac{1}{3}\lambda_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 24/\text{uur}$$

(b) Alle drie de automaten zijn op te vatten als M/M/1 wachtsystemen

dus bezettingsgraden zijn $1 - P_0 = \rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu} = 24 \times \frac{90}{3600} = \frac{3}{5}$

(c) $(1-\rho_1)(1-\rho_2)(1-\rho_3) = \left(\frac{2}{5}\right)^3$ [Productstelling]

(d) gem. # in de speelhal $= 3 * \frac{\rho}{1-\rho} = 3 * \frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{9}{2}$

Volgens Little : $\bar{F} = \frac{\frac{9}{2}}{24} = \frac{9}{48}$ uur

(e) gem # spelletjes $= 1 * \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} = 3$$