

Kenmerk: EW104/TW/SOR/109/RB  
Datum: 6 June 2007

**Tentamen Stochastische Modellen in Operations  
Management (153088)  
Woensdag 11 augustus 2004, 9:00 – 12:00 uur**

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven.  
Eindcijfer =  $(10 + \text{aantal behaalde punten})/10$ .  
Vermeld ook uw studentnummer op uw werk.

Opgave 1 (20 punten)

Je doet mee aan een quiz, en belandt in de finale met een bedrag in kas van € 3750. In deze finale kun je d.m.v. een gokspelletje je bedrag nog enigszins verhogen. Dit spelletje bestaat uit maximaal drie beurten. Bij iedere beurt mag je besluiten te stoppen, om daarmee het bedrag in kas te incasseren. Zo niet, dan moet je aan een speciaal rad draaien om te bepalen met hoeveel je bedrag zal worden opgehoogd. Je loopt daarbij echter het risico op BLUT te belanden, waardoor je al je geld kwijtraakt (maar nog wel mag doorspelen). Je vraagt je af wat te doen teneinde je verwachte eindbedrag te maximaliseren. Het rad ziet er (schematisch) als volgt uit:

uitkomst	€ 250	€ 500	€ 1000	BLUT
kans	0.4	0.3	0.2	0.1

Je kunt dit probleem oplossen m.b.v. een stochastisch DP-formulering. Definieer hiertoe  $f_n(x)$  als je maximale verwachte eindbedrag indien je €  $x$  in kas hebt na de  $n^e$  beurt.

- (a) Benoem de fasen, toestanden en beslissingen in bovenstaande formulering. Geef bovendien de toestandruimte in elke fase.
- (b) Beargumenteer dat  $f_3(x)=x$  voor  $x \geq 4500$ , en  $f_2(x)=0.9x+450$  voor  $x \leq 4500$ .
- (c) Geef de recurrente betrekkingen voor  $f_0(x)$ , en  $f_1(x)$ .
- (d) Bepaal m.b.v. de achterwaartse recursie je optimale strategie, en geef deze in woorden weer. Hoeveel bedraagt je verwachte eindbedrag?

Opgave 2 (25 punten)

Piet is een ondernemende student die een speciaal product op de markt brengt. Zijn marktsituatie kan zich iedere week in twee toestanden bevinden: het product loopt “goed” of “slecht”. Als het deze week “goed” loopt is de kans dat het volgende week “goed” loopt  $1/2$ . Als het deze week “slecht” loopt is de kans dat het de daaropvolgende week “goed” loopt  $2/5$ .

In de toestand “goed” heeft Piet de keuze om al dan niet te adverteren; in de toestand “slecht” heeft hij de keuze om al dan niet “research” te doen. Wordt in de toestand “goed” geadverteerd dan is de kans  $8/10$  dat het product de volgende week “goed” loopt. Wordt in de toestand “slecht” research gedaan dan is de kans  $7/10$  dat de toestand de volgende week “goed” is.

De netto opbrengsten per week, afhankelijk van Piet’s acties en de toestandsovergangen zijn als volgt.

			Nieuwe toestand	
			goed	Slecht
Huidige toestand	Goed	Adverteren	4	4
		Niet adv.	9	3
	slecht	Research	1	-19
		Geen Res.	3	-7

Ter illustratie: als de huidige toestand “goed” is en Piet besluit niet te adverteren, dan is de netto opbrengst 9 indien het product de volgende week ook “goed” loopt en 3 indien het product de volgende week “slecht” loopt.

Gezocht wordt een politiek welke de verwachte verdisconteerde opbrengsten over een oneindige horizon maximaliseert met disconteringsfactor  $1/2$ .

- (a) Geef de optimaliteitsvergelijking(en).
- (b) Welke stationaire politieken zijn er?
- (c) Voer twee iteraties van het waarde-iteratie algoritme uit.
- (d) Laat m.b.v. het strategie-iteratie algoritme zien dat de stationaire politiek: “adverteren” en “geen research”, niet optimaal is. Wat is de volgende politiek die in het strategie-iteratie algoritme wordt onderzocht?

Opgave 3 (25 punten)

Klanten arriveren volgens een Poissonproces met intensiteit  $\lambda$  bij een wachstysteem met 2 wachtplaatsen en één server. De bedieningsduren zijn exponentieel verdeeld met verwachtingswaarde  $\mu^{-1}$ . Als de server werkt is deze onderhevig aan stochastische uitval volgens een Poissonproces met intensiteit  $\alpha$ . Als de server uitvalt, wordt deze onmiddellijk gerepareerd. De reparatieduren zijn exponentieel verdeeld met gemiddelde  $\beta^{-1}$ .

Na reparatie functioneert de server weer als “nieuw” en begint weer met de bediening die op moment van uitval onderhanden was.

Een klant die het systeem vol aantreft gaat verloren.

Alle onderliggende stochastische variabelen zijn onderling onafhankelijk.

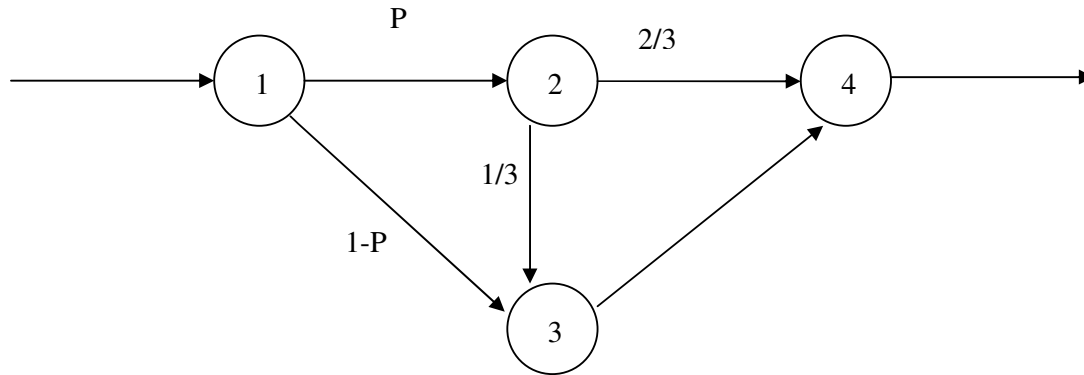
- (a) Beschrijf het toestandsproces met zijn toestanden [bedenk dat zowel het aantal klanten in het systeem als de toestand van de server in de toestandsbeschrijving opgenomen moeten worden] d.m.v. een overgangsintensiteitendiagram.
- (b) Geef de balansvergelijkingen en los ze op.

De antwoorden op de volgende vragen moeten uitgedrukt worden in de gegeven parameters en toestandskansen.

- (c) Hoe groot zijn de binnenkomst- en vertrekintensiteit?
- (d) Geef een uitdrukking voor het gemiddeld aantal klanten in het systeem.
- (e) Hoe groot is de fractie van de tijd dat de server bezig is met bedienen?
- (f) Hoe groot is de fractie van de tijd dat de server in reparatie is?
- (g) Wat is de verdeling van de tijd gedurende welke het systeem ononderbroken leeg is?

Opgave 4 (20 punten)

Beschouw een open exponentieel netwerk bestaande uit 4 stations als weergegeven in onderstaande figuur, samen met de overgangskansen tussen de stations. Het systeem is stationair. De gemiddelde bedieningsduur van station  $i$  is  $\mu_i^{-1}$ ,  $i=1,2,3,4$ , met waarden  $\mu_1=1$ ,  $\mu_2=2$ ,  $\mu_3=3$ ,  $\mu_4=1$ . De externe aankomstintensiteit bij station 1 is  $\gamma_1$ .



- Formuleer de stroomvergelijkingen en los deze op.
- Hoe luidt de stationariteitsvoorwaarde?
- De toestand van het netwerk is  $(n_1, n_2, n_3, n_4)$ , de aantallen klanten bij station 1, 2, 3, 4. Geef de kansverdeling van de aantallen klanten bij de vier stations.
- Geef voor ieder station een uitdrukking voor het gemiddelde aantal klanten en voor de gemiddelde verblijftijd van een klant.
- Geef een uitdrukking voor de gemiddelde verblijftijd van een klant in het netwerk.