FACULTEIT MANAGEMENT en BESTUUR
Kenmerk: OMPL09.010/lw
Datum: 6 april 2009

TENTAMEN STOCHASTISCHE MODELLEN IN OPERATIONS MANAGEMENT (153088)

Dinsdag 14 april 2009, 9.00-12.00 uur

Opmerkingen vooraf:

1. Gelieve het blok **bovenaan** het tentamformulier in te vullen, inclusief studentnummer, opleiding en vakcode.
2. Het gebruik van boeken, syllabi, **grafische rekenmachines** of aantekeningen is **niet** toegestaan bij dit tentamen. Een eenvoudige rekenmachine is wel toegestaan.
3. Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven.
4. De score voor dit tentamen is gelijk aan (aantal behaalde punten+4)/4.
5. **Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd en waar nodig van een berekening te worden voorzien.**

Opgave 1 (8 punten)

Je doet mee aan een quiz, en belandt in de finale met een bedrag in kas van € 3750. In deze finale kun je d.m. v. een gokspelletje je bedrag nog enigszins verhogen. Dit spelletje bestaat uit maximaal drie beurten. Bij iedere beurt mag je besluiten te stoppen, om daarmee het bedrag in kas te incasseren. Zo niet, dan moet je aan een speciaal rad draaien om te bepalen met hoeveel je bedrag zal worden opgehoogd. Je loopt daarbij echter het risico op BLUT te belanden, waardoor je al je geld kwijtraakt (maar nog wel mag doorspelen). Je vraagt je af wat te doen teneinde je verwachte eindbedrag te maximaliseren. Het rad ziet er (schematisch) als volgt uit:

Uitkomst	€ 250	€ 500	€ 1000	BLUT
Kans	0.4	0.3	0.2	0.1

Je kunt dit probleem oplossen m.b.v. een stochastisch DP-formulering. Definieer hiertoe $f_n(x)$ als je maximale verwachte eindbedrag indien je € x in kas hebt na de n^e beurt.

a) Benoem de fasen, toestanden en beslissingen in bovenstaande formulering. Geef bovendien de toestandsruimte in elke fase.
b) Beargumenteer dat $f_2(x)=x$ voor $x \geq 4500$ en $f_2(x) = 0.9*x + 450$ voor $x \leq 4500$.
c) Geef de recurrente betrekkingen voor $f_0(x)$ en $f_1(x)$
d) Bepaal m.b.v. achterwaartse recursie je optimale strategie, en geef deze in woorden weer. Hoeveel bedraagt je verwachte eindbedrag?

Opgave 2 (10 punten)

Een architect werkt samen met drie aannemers A, B en C die elkaars concurrenten zijn. Elke maand heeft hij één ontwerp uit te voeren en benadert daar één van de drie aannemers voor. Als een aannemer die benaderd wordt niet kan of niet wil, wordt het ontwerp voor die maand door de architect in eigen beheer uitgevoerd. De voorwaardelijke kansen dat de gevraagde aannemer het projectontwerp accepteert, gegeven de situatie in de voorafgaande maand, staan in de volgende tabel:

Toestand vorige maand	Kans op acceptatie deze maand door:		
	A	B	C
In eigen beheer	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
Met A gedaan	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
Met B gedaan	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
Met C gedaan	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

De architect wil het verdisconteerde aantal keren dat hij een project in eigen beheer moet uitvoeren over een oneindige horizon minimaliseren (kies als verdisconteringsfactor $\alpha = \frac{3}{4}$).

a) Dit probleem kan worden gedefinieerd als een Markov beslissingsprobleem. Definieer de toestanden i, de beslissingen d en de optimale waardefunctie V(i).
b) Bepaal de verwachte directe kosten r(i,d) en de overgangskansen p(j|i,d) voor iedere toestand i en beslissing d.
c) Geef de optimaliteitsvergelijkingen voor dit probleem.
d) Kies de volgende startpolitiek: benader aannemer A, B en C als dezelfde aannemer vorige maand de opdracht heeft uitgevoerd, benader A als de architect de opdracht vorige maand zelf heeft uitgevoerd. Gebruik politiek iteratie om te bepalen of deze politiek optimaal is.
e) Voer 2 stappen uit van het waarde iteratie algoritme uitgaande van $V_0(i) = 0$ voor alle i.

Opgave 3 (11 punten)

Beschouw een eindig wachtrijsysteem met drie wachtplaatsen en één loket. Klanten arriveren volgens een Poissonproces met intensiteit λ . De bedieningsduren zijn negatief exponentieel verdeeld met gemiddelde $1/\mu$.

Wachtende klanten trekken aandacht van nieuwsgierige voorbijgangers. Daarmee genereren wachtende klanten een nieuwe aankomststroom. Nieuwsgierige voorbijgangers passeren het wachtrijsysteem met intensiteit 2ν. Indien er nog één vrije plaats is in het systeem is, dan gaan nieuwsgierige voorbijgangers altijd het wachtrijsysteem binnen. Indien er één wachtende klant in het systeem is, dan gaat een passerende nieuwsgierige voorbijganger met kans ½ naar binnen.

Indien het systeem vol is op het moment dat iemand arriveert gaat deze weg en komt nooit meer terug. (Dit geldt uiteraard voor beide aankomststromen.)
Met P_n duiden we de stationaire kans aan op n klanten in het systeem.

a) Geef het transitiediagram en de evenwichtsvergelijkingen.
b) Bepaal uit de evenwichtsvergelijkingen de stationaire kansen.

De antwoorden op de volgende vragen mogen gegeven worden in termen van P_n, λ, μ en ν.

c) Geef een uitdrukking voor het gemiddeld aantal wachtende klanten in het systeem.
d) Hoeveel personen gaan gemiddeld naar binnen per tijdseenheid?
e) Hoeveel klanten worden gemiddeld bediend per tijdseenheid?
f) Wat is de gemiddelde wachttijd van een willekeurige klant in het systeem?

Opgave 4 (7 punten)
Beschouw een bedrijf waarin T-shirts worden gemaakt en bedrukt. We bekijken de afdeling waarin eerst de afbeeldingen op de T-shirts worden gestreken en de T-shirts vervolgens worden verpakt. Deze twee handelingen worden steeds door één en dezelfde medewerker voor één T-shirt achtereenvolgens verricht. Er is één strijkapparaat en één inpakmachine en deze staan beiden in een aparte ruimte.
De duur van het strijken en verpakken is negatief exponentieel verdeeld met respectievelijk gemiddelde 6 minuten en 2 minuten. De loopafstand van de ene ruimte naar de andere is verwaarloosbaar.
De productie-afdeling van het bedrijf is zo ingericht dat de afdeling altijd T-shirts beschikbaar heeft om te bedrukken.
Er is echter wel een probleem op de afdeling. Het strijkapparaat is verouderd. Dit heeft tot gevolg dat de strijkhandeling met kans $p = \frac{1}{2}$ moet worden overgedaan.
Er werken m medewerkers op de afdeling.

a) Modelleer de afdeling als een gesloten netwerk van wachtrijen.
b) Bepaal, gebruikmakend van het algoritme van Buzen, de kansverdeling van de medewerkers over de activiteiten (strijken en inpakken) indien er $m = 2$ medewerkers op de afdeling werken. Wat is de kans dat er niemand aan het strijken is?
c) Bepaal m.b.v. *mean value analysis* het gemiddelde aantal medewerkers en de gemiddelde verblijftijd in de strijk- en de inpakruimte, indien $m = 2$.