FACULTEIT MANAGEMENT en BESTUUR
Kenmerk: OMPL11.015/lw
Datum: 8 april 2011

TENTAMEN STOCHASTISCHE MODELLEN IN OPERATIONS MANAGEMENT (191530881)

Dinsdag 12 april 2011, 8.45 – 11.45 uur

Opmerkingen vooraf:

1. Het gebruik van boeken, syllabi, **grafische rekenmachines** of aantekeningen is **niet** toegestaan bij dit tentamen. Een eenvoudige rekenmachine is wel toegestaan.
2. Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven.
3. De score voor dit tentamen is gelijk aan (aantal behaalde punten+4)/4.
4. **Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd en waar nodig van een berekening te worden voorzien.**

Opgave 1 (8 punten)

Een potentiële langstudeerder van de opleiding TBK heeft zijn B-opdracht afgerond en, zeer tot zijn opluchting, ook SMOM gehaald. Hem resten het laatste kwartiel van dit studiejaar nog 3 lastige vakken, te weten A, B en C. Hij wil alles op alles zetten om, naast zijn werk bij Stress en AH, die vakken dit studiejaar nog af te ronden. Hij besluit zijn sociale verplichtingen op een laag pitje te zetten, zodat hij 40 uur per week kan studeren. Hij heeft een inschatting gemaakt van de kansen dat hij een bepaald vak zal halen als functie van de tijd die hij er in investeert. Hij kan aan een vak wekelijks 0, 1,..., 5 dagen besteden. Neem aan dat het aantal dagen dat hij aan een bepaald vak besteedt van week tot week hetzelfde is (dus bijvoorbeeld: hij besteedt het gehele kwartiel 2 dagen aan vak A elke week). De slaagkansen voor een bepaald vak bij de verschillende niveau's van inspanning staan in de volgende tabel:

Aantal dagen	Slaagkans A	Slaagkans B	Slaagkans C
0	.20	.25	.10
1	.40	.50	.30
2	.60	.60	.45
3	.75	.70	.55
4	.80	.75	.65
5	.85	.80	.70

De student wil zijn tijd zodanig over de vakken verdelen dat de kans dat hij geen enkel vak haalt zo klein mogelijk is. Hij besluit zijn bij SMOM opgedane kennis in praktijk te brengen en dit probleem op te lossen met stochastische dynamische programmering. Hij komt tot de conclusie dat hij 5 dagen per week aan vak A moet besteden. De student voelt wel aan dat dit niet de optimale oplossing is, maar hij kan de fout in zijn model niet vinden. Hij vraagt jullie om hulp.

a) Formuleer het probleem als een stochastisch dynamisch programmeringsprobleem. Wat kies je als:
   - fasen
   - toestanden
   - beslissingen
   - optimale-waardefunctie?
b) Geef de recurrente betrekking voor de optimale-waardefunctie.
c) Los het probleem op via dynamische programmering. (Er hoeft geen *policy table* gegeven te worden.)

Opgave 2 (10 punten)
Een machine kan zich aan het begin van een maand in vier toestanden bevinden: goed, redelijk, matig en slecht. De opbrengst van de productie van de machine (in euro's), afhankelijk van de toestand waarin die zich bevindt aan het begin van de maand, bedraagt per maand: 200 (goed), 150 (redelijk), 100 (matig) en 20 (slecht).
Aan het *eind* van iedere maand kan de machine onderhouden of vervangen worden. Indien de machine aan het begin van de maand in goede staat verkeert, dan wordt nooit onderhoud verricht en de machine wordt uiteraard ook niet vervangen aan het eind van de maand. Indien de machine aan het begin van de maand in redelijke staat verkeert, dan wordt aan het eind van de maand gekozen voor klein onderhoud (kosten 20 euro) of geen onderhoud. Als gekozen wordt voor klein onderhoud, dan is de machine aan het begin van de volgende maand weer in goede staat. Indien de machine aan het begin van de maand in matige staat verkeert, dan kan aan het eind van de maand gekozen worden voor: geen onderhoud, klein onderhoud of groot onderhoud (kosten 100 euro). Bij klein onderhoud is de toestand van de machine aan het begin van de volgende maand redelijk, bij groot onderhoud goed. Indien de machine aan het begin van de maand in slechte staat verkeert, dan kan aan het eind van de maand gekozen worden voor: klein onderhoud, groot onderhoud of vervanging (kosten 300 euro). Bij klein onderhoud is de toestand van de machine aan het begin van de volgende maand matig, bij groot onderhoud redelijk. Vervanging zorgt er uiteraard voor dat de toestand aan het begin van de volgende maand goed is. Als er geen onderhoud wordt verricht, dan zijn de overgangskansen als volgt:

van \ naar	goed	redelijk	matig	slecht
goed	0.8	0.2	0	0
redelijk	0	0.6	0.4	0
matig	0	0	0.2	0.8
slecht	0	0	0	1

De directie vraagt zich af wat de optimale onderhoudsstrategie is die de verwachte verdisconteerde opbrengsten minus kosten over een oneindige horizon maximaliseert bij een verdisconteringsfactor van $\beta = 0.8$ per maand.

a) Bepaal voor dit Markov beslissingsprobleem respectievelijk de toestanden, de mogelijke beslissingen in een bepaalde toestand, de directe opbrengsten minus kosten als functie van de toestand en de beslissing, en de overgangskansen.
b) Formuleer de optimaliteitsvergelijking voor de optimale-waardefunctie V(i).
c) Voer twee slagen uit van het successieve-approximatie (*value iteration*) algoritme, d.w.z. bepaal $V_1(i)$ en $V_2(i)$, uitgaande van $V_0(i) = 0$. Bepaal in elke stap de bijbehorende kandidaat-strategie.

Veronderstel dat het bedrijf de volgende onderhoudsstrategie hanteert voor de machine: er wordt geen onderhoud verricht als de machine zich aan het begin van de maand in goede of redelijke staat bevindt, er wordt klein onderhoud verricht indien de machine in matige staat verkeert en groot onderhoud indien de machine in slechte staat verkeert.

d) Wat zijn de verwachte verdisconteerde opbrengsten voor elke begintoestand bij deze strategie/politiek?
e) Gebruik *policy iteration* om te laten zien dat de gegeven politiek niet optimaal is.

Opgave 3 (10 punten)
Het werkcollege SMOM op vrijdagmiddag wordt slecht bezocht. Er zijn slechts 4 studenten aanwezig. Deze studenten zijn echter wel serieus bezig. Ze hebben regelmatig vragen die door de docent volgens het FIFO principe worden beantwoord. Neem aan dat de door elke individuele student gestelde vragen gegenereerd worden door een Poisson proces met intensiteit λ per uur. Het beantwoorden van een vraag vergt een een negatief exponentieel verdeelde tijdsduur met een gemiddelde van $1/\mu$ uur. Als er drie of meer vragen zijn, dan wordt de docent zenuwachtig en geeft kortere antwoorden, de gemiddelde beantwoording van een vraag vergt dan $1/(2\mu)$ uur. Door de kortere antwoorden neemt het aantal vragen echter niet toe. (Wellicht moet de docent zich in de volgende collegecyclus sowieso beperken tot kortere antwoorden.)

a) Teken een transitiediagram voor deze situatie.
b) Bepaal de evenwichtsvergelijkingen en bepaal hieruit de evenwichtskansen. Voor welke waarden van λ en μ is het systeem stabiel?

De antwoorden op de volgende vragen mogen uitgedrukt worden in λ, μ en de evenwichtskansen uit onderdeel b).

c) Wat is het gemiddelde aantal studenten van wie de vraag nog niet beantwoord is (dus inclusief de student van wie de docent de vraag aan het beantwoorden is)?
d) Wat is de gemiddelde <u>wachttijd</u> van een student met een vraag?
e) Hoeveel vragen beantwoordt de docent gemiddeld per uur?
f) Wat is de gemiddelde lengte van een interval waarin de docent onafgebroken vragen beantwoordt?

Opgave 4 (8 punten)
Beschouw een Markov keten met de volgende overgangskansen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bepaal de stationaire kansverdeling voor deze Markovketen.
b) Bepaal het verwachte aantal overgangen dat nodig is om vanuit toestand 1 voor het eerst toestand 2 te bereiken.

Beschouw de Markov keten nu als een gesloten netwerk. We spreken vanaf nu van stations in plaats van toestanden.
Neem aan dat er m jobs in het systeem aanwezig zijn.
Neem aan dat ieder station een enkele server heeft en dat in de wachtruimtes bij de stations plaats is voor alle aankomende jobs. De gemiddelde bedieningsrate (per tijdseenheid) in de verschillende stations bedraagt resp. $\mu_1 = 3/10$, $\mu_2 = 2/10$, $\mu_3 = 3/10$ en $\mu_4 = 6/10$.

c) Bepaal m.b.v. *mean value analysis* de gemiddelde verblijftijd van een job bij elk van de 4 stations in het geval dat $m = 2$. (Hint: laat breuken staan)
d) Neem weer aan dat $m = 2$. Laat zien dat uit het algoritme van Buzen volgt dat $C_4(2) = 23/4$. Wat is de bezettingsgraad van machine 1?