Kenmerk: EWI07/TW/SK/116/DM/tk
Datum: 24 October 2008

Oefententamen Wiskundige Statistiek (153038)-Oktober 2007

N.B. Tot één uur na aanvang van het tentamen kunt u besluiten alsnog van deelname af te zien. U moet uw werk dan wèl afgeven aan de surveillant, maar als u erop vermeld heeft “AFGEZIEN VAN DEELNAME”, wordt het niet beoordeeld.

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven, de tabellen en enige formules die mogelijk gebruikt kunnen worden bij dit tentamen. Vermeld ook uw studentnummer op werk en tentamenbriefje.

Opgave 1
Zij $X_1,...,X_9$ een aselecte steekproef uit een normale verdeling met verwachting μ en variantie σ_1^2. We vinden de volgende uitkomst: $\sum_{i=1}^{9} x_i = 0$, $\sum_{i=1}^{9} x_i^2 = 440$.

a. Bepaal een tweezijdig betrouwbaarheidsinterval voor σ^2 met betrouwbaarheid $\gamma = 0.90$.

Zij $Y_1,...,Y_{16}$ een aselecte steekproef uit een normale verdeling met verwachting υ en variantie σ_2^2.
Neem aan dat $(X_1,...,X_9)$ en $(Y_1,...,Y_{16})$ onderling onafhankelijk zijn.
Gevonden wordt: $\sum_{i}^{16} y_i = 28$ en $\sum_{i=1}^{16} y_i^2 = 799$.

b. Ga met een geschikte toets na of de varianties gelijk verondersteld kunnen worden.

Opgave 2
Om het effect van een bepaalde vermageringskuur te bestuderen wordt van 10 proefpersonen het gewicht vóór en na de behandeling verzameld (afgerond in kilogrammen).

nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
voor:	81	91	110	91	92	101	94	98	75	100
na:	82	85	112	81	84	93	85	90	78	83

Neem bij a. en b. aan dat de onderliggende verdelingen normaal zijn.

a. Toets bij onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha_0 = 0.05$ of de kuur effect heeft.
(Geef model, hypothesen, toetsingsgrootheid + verdeling, kritiek gebied en de conclusie)
b. Geef een naar beneden begrensd betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde gewichtsverlies met $\gamma = 0.95$.

De onderzoeker twijfelt aan de normaliteitaanname en geeft er daarom de voorkeur aan om een parametervrije toets uit te voeren.

c. Voer een parametervrije toets uit om te onderzoeken of de kuur effect heeft, met $\alpha_0 = 0.10$. Geef uitsluitend de toetsingsgrootheid, zijn verdeling en waargenomen waarde en beslis aan de hand van de overschrijdingskans.

Opgave 3
We hebben de beschikking over 3 onderling onafhankelijke schatters T_1, T_2 en T_3 van de parameter θ. Elk van de schatters is gebaseerd op een steekproef van uitgebreidheid n. Verder is gegeven dat
$E(T_1) = E(T_2) = E(T_3) = \theta$ en
$\text{var}(T_1) = \sigma^2/n$, $\text{var}(T_2) = 2\sigma^2/n$ en $E(T_3) = 3\sigma^2/n$
We beschouwen nu de klasse van lineaire schatters $T = aT_1, + bT_2 + cT_3$ (waarin a, b en c reële getallen zijn).

a. Voor welke waarden van a, b en c is T een zuivere schatter van θ?
b. Voor welke waarden van a, b en c is T een zuivere schatter met minimale variantie?
c. Voor welke waarden van a, b en c is T een consistente schatter?

Opgave 4
Gegeven is de exponentiële verdeling van X met onbekende parameter $\lambda > 0$, dus
$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, voor $x \geq 0$ (en $f(x) = 0$ voor $x < 0$).
We hebben de beschikking over een aselecte steekproef $X_1,...,X_n$ van X.

a. Laat zien dat $\hat{\lambda} = 1/\overline{X}$ de meest aannemelijke schatter van λ is.

We willen $H_0 : \lambda = 1$ toetsen tegen $H_1 : \lambda \neq 1$ met $\alpha_0 = 0.10$ en $\overline{X}$ als toetsingsgrootheid.

b. Toon aan dat deze toets equivalent is met de aannemelijkheidsquotiënt-toets.
Pas de formule $\Lambda(x_1,\ldots,x_n) = \dfrac{\sup_{\theta \in \Theta_0} \prod g(x_i,\theta)}{\sup_{\theta \in \Theta} \prod g(x_i,\theta)}$, de kritieke waarde van Λ hoeft niet bepaald te worden.
c. Bepaal (benader met de CLS) voor $n = 25$ het kritiek gebied.
d. Wat moet gelden bij zuiverheid en wat bij consistentie van deze toets? Toon de consistentie aan.

Opgave 5
Zij gegeven een vaas met een zeer groot, maar verder onbekend, aantal witte balletjes. Om een uitspraak te kunnen doen over dit aantal, dat we m zullen noemen, gaan we als volgt te werk. Eerst halen we 200 balletjes uit de vaas, kleuren deze balletjes rood en stoppen ze vervolgens weer terug in de vaas. Hierna nemen we een aselecte steekproef ter grootte van 150 balletjes uit de vaas. Het blijkt dat daar 10 rode balletjes bij zitten.
Op grond van deze uitkomst is nu de opdracht:

Toets $H_0 : m \geq 5000$ bij $\alpha_0 = 0.05$.

Enige formules bij het proeftentamen wiskundige statistiek (153038)

- exponentiële verdeling: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x \geq 0)$ en $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ $(x \geq 0)$
  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ en $var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- aannemelijkheidsquotiënt $\Lambda(x_1,\ldots,x_n) = \dfrac{\sup_{\theta \in \Theta_0} \prod g(x_i,\theta)}{\sup_{\theta \in \Theta} \prod g(x_i,\theta)}$
- Normale benadering van de rangsom van Wilcoxon:
  Zonder knopen: N($\frac{1}{2}m(N+1)$, $\frac{1}{12} mn(N+1)$)
  Met knopen: N($\frac{1}{2}m(N+1)$, $\frac{1}{12}\frac{mn(N^3 - \sum t_i^3)}{N(N-1)}$)

Normering:

1a	1b	2a	2b	2c	3a	3b	3c	4a	4b	4c	4d	5	Totaal	Eindcijfer: 1 + (aantal punten) *9 / 42
3	5	5	3	4	2	2	2	3	2	3	3	5	42	(afgerond) + evt. bonuspunt

Bijlagen: de tabellen van de B(n,p)-, Poisson, N(0,1)-, Student-, chikwadraat- en F-verdelingen