Uitwerking **Tentamen Wiskundige Statistiek (153038),** vrijdag 2 november 2007

1.a. De uitwerking wordt hier gegeven aan de hand van de 8-staps-toetsingsprocedure

1. Model: de gebruiksduren $X_1,......,X_{10}$ zijn o.o. en normaal verdeeld met onbekende parameters μ en σ^2.
2. Toets H_0: μ = 5 tegen H_1: μ > 5 met α = 0.05
3. Toetsingsgrootheid $T = \dfrac{\overline{X} - 5}{\sqrt{S^2/10}}$
4. T ≅ T(9) onder H_0 (t-verdeling met n - 1 = 9 vrijheidsgraden)
5. waargenomen steekproefgemiddelde $\overline{x}$ = 5.2 jaar en steekproefvariantie s^2 = 0.853
   Dus $t = \dfrac{5.2 - 5}{\sqrt{0.853/10}} \approx 0.68$
6. Rechtseenzijdige toets: als $T \geq c$, dan H_0 verwerpen.
   P($T \geq$ c | H_0) ≤ α_0 = 0.05, dus c = 1.83
7. t = 0.68 < 1.83 = c, dus H_0 niet verwerpen.
8. Er is onvoldoende bewijs voor de bewering dat de verwachte gebruiksduur groter is dan 5 jaar, bij een onbetrouwbaarheid van 5%

b. 95%-BI(σ^2) = $\left[\dfrac{(n-1)s^2}{c_2}, \dfrac{(n-1)s^2}{c_1}\right] = \left[\dfrac{9 \times 0.853}{19.0}, \dfrac{9 \times 0.853}{2.70}\right] \approx [0.40, 2.84]$,

omdat n = 10, s^2 = 0.853 en uit de chikwadraat-tabel met 9 vrijheidsgraden (α = 1- γ = 1- 0.95):

P(W(9) ≤ c_1) ≤ ½α = 0.025, dus c_1 = 2.70 en

P(W(9) ≤ c_2) ≥ 1- ½α = 0.97, dus c_2 = 19.0.

c. H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ wordt niet verworpen ten gunste van H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ met onbetrouwbaarheid α=0.05, indien σ_0^2 in het 95%-betrouwbaarheidsinterval van σ^2 ligt, dus als $0.40 < \sigma_0^2 < 2.84$

Opgave 2

a. $X \cong N(\mu, \mu^2)$ en $\overline{X} \cong N(\mu, \mu^2/n)$

Dus E(Y) = E(a $\overline{X}$) = a E($\overline{X}$) = a μ = μ als a= 1.

b. Y = a $\overline{X} \cong N(a\mu, a^2\mu^2/n)$

MSE(Y) = var(Y) + $(EY - \mu)^2 = a^2\mu^2/n + (a-1)^2\mu^2 = \mu^2 (a^2/n + (a-1)^2)$

minimum van $f(a) = a^2/n + (a-1)^2$ bepalen: f `(a) = 2a/n + 2(a -1) = 0 als a = n/(n+1).

De grafiek van f is een dalparabool dus MSE(Y) is minimaal voor a = n/(n+1).

c. Onderdeel b, dus a = 1: $Y = \overline{X}$ is een zuivere schatter van μ en *lim* var(Y)= *lim* $\mu^2/n = 0$ voor n → ∞, dus dan is Y een consistente schatter van μ. (Deze conclusie volgt ook uit de sterke wet van de grote aantallen)

Onderdeel c, dus a = n/(n+1): Y = a $\overline{X} \cong N(n\mu/(n+1), n\mu^2/(n+1)^2)$

lim E(Y)= *lim* $n\mu^2/(n+1)$ = μ en *lim* var(Y)= *lim* $n\mu^2/(n+1)^2 = 0$ voor n → ∞, dus Y is asymptotisch raak (consistent)

Opgave 3

a. L(ϑ ; $x_1, \ldots, x_n$) = $\prod f_{X_i}(x_i) = \vartheta^{-n} e^{-\frac{\Sigma x_i}{\vartheta}}$, met $\vartheta > 0$

$L^*(\vartheta) = -n\, ln(\vartheta) - (\Sigma x_i)/\vartheta$, met $\vartheta > 0$

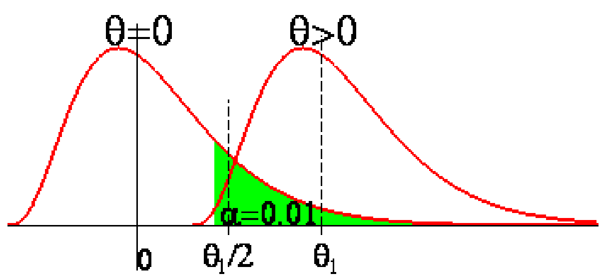
extrema (afgeleide L* = 0): $-n/\vartheta + (\Sigma x_i)/\vartheta^2 = [-n + (\Sigma x_i)/\vartheta]/\vartheta = 0$, dus $\vartheta = n^{-1}\Sigma x_i = \overline{x}$

Uit tekenschema van (L*)` of de tweede afgeleide in $\bar{x}$ (deze is kleiner dan 0) volgt dat L* (en dus) L maximaal is voor $\vartheta = \bar{x}$. $\hat{\vartheta} = \bar{X}$ is de m.a. schatter van ϑ

b. Rechtseenzijdige toets: H_0 verwerpen als $\bar{X} \geq c$
X is exponentieel verdeeld met parameter $1/\vartheta$, dus E(X) = ϑ en var(X) = ϑ^2
$\bar{X}$ is volgens de CLS bij benadering N(ϑ, ϑ^2/n), dus N(1, 1/n) als ϑ =1:
$P_{\vartheta=1}(\bar{X} \geq c) \leq \alpha_0 = 0.01$
$\Phi(\,(c-1)\sqrt{n}\,) = 0.99$, dus $(c-1)\sqrt{n} \approx 2.33$ ofwel c 2.33/2 -√n /2 ≈ 1 + 2.33/√n

c. De eis is dat het onderscheidend vermogen $\beta(2) \geq 0.95$.
$\beta(2) = P_{\vartheta=2}(\bar{X} \geq c) = P_{\vartheta=2}(\bar{X} \geq 1 + 2.33/\sqrt{n})$.
Voor ϑ =2 is $\bar{X}$ N(2, 4/n), dus $\beta(2) \approx 1- \Phi(\ (1 + 2.33/\sqrt{n} -2)\ \sqrt{n}/2\ ) = 1- \Phi(\ 2.33/2 -\sqrt{n}/2\ )$
$\beta(2) \geq 0.95$ als $2.33/2 -\sqrt{n}/2 \leq -1.645$, dus als $n \geq (2.33 + 1.645\times 2) \approx 31.6$ dus $n \geq 32$

d. We kunnen hier gebruikmaken van de sterke wet van de grote aantallen: $\bar{X}$ convergeert bijna zeker, dus ook in kans, naar ϑ: $\lim_{n\to\infty} P_\vartheta(|\bar{X}-\vartheta| > \varepsilon) = 0$ voor elke $\varepsilon > 0$.
Voor $\vartheta = 0$ geldt $P_0(\bar{X} > \varepsilon) \leq P_0(|\bar{X}| > \varepsilon)$. Dus ook $\lim_{n\to\infty} P_0(\bar{X} > \varepsilon) = 0$



Kiezen we $\vartheta_1 > 0$, dan betekent deze limiet voor $\varepsilon = \frac{1}{2}\vartheta_1$, dat er een n_1 (afhankelijk van ϑ_1) is, zodat voor $n \geq n_1$ geldt: $P_0(\bar{X} > \frac{1}{2}\vartheta_1) \leq 0.01 = \alpha$ (Dus de kritieke grens c ligt dan links van $\frac{1}{2}\vartheta_1$).
Voor $n \geq n_1$ geldt:

$$\beta(\vartheta_1) = P_{\vartheta_1}(\bar{X} \geq c) \geq P_{\vartheta_1}(\bar{X} \geq \tfrac{1}{2}\vartheta_1) \geq P_{\vartheta_1}(|\bar{X}-\vartheta_1| \leq \tfrac{1}{2}\vartheta_1) = 1 - P_{\vartheta_1}(|\bar{X}-\vartheta_1| > \tfrac{1}{2}\vartheta_1)$$

Weer volgens de sterke wet gaat de kans in het rechterlid naar 0, en omdat $\beta(\vartheta_1) \leq 1$,
dus $\lim_{n\to\infty} \beta(\vartheta_1) = 1$.

(*Een wat "slordiger" bewijs gaat analoog aan onderdeel c:*
Er geldt $\beta(\vartheta) = P_\vartheta(\bar{X} \geq c) \approx P_\vartheta(\bar{X} \geq 1 + 2.33/\sqrt{n})$. $\bar{X}$ is volgens de CLS bij benadering N(ϑ, ϑ^2/n), dus $\beta(\vartheta) \approx 1- \Phi[\,(1 + 2.33/\sqrt{n} - \vartheta)\,\sqrt{n}/\vartheta\,] = 1- \Phi[\,2.33/\vartheta - (1- 1/\vartheta)\sqrt{n}\,]$
Voor $\vartheta > 1$ geldt $2.33/\vartheta - (1- 1/\vartheta)\sqrt{n} \to -\infty$ als $n \to \infty$, dus $\beta(\vartheta) \to 1$ voor $n \to \infty$.
De toets is dus consistent.)

Opgave 4
Volgens het lemma van Neyman-Pierson is de toets die voor grote waarden van T de nulhypothese verwerpt de MP-toets.
Hierin is $T = \dfrac{L(2)}{L(1)}$, met $L(\lambda) = L(\lambda; X_1, \ldots, X_n)$ de aannemelijkheidfunctie uit opgave 3.a

$$T = \frac{2^{-n} e^{-\sum X_i/2}}{e^{-\sum X_i}} = 2^{-n} e^{+\sum X_i/2}$$ neemt grote waarden aan voor grote waarden van $\sum X_i$,

dus voor grote waarden van $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum X_i$.

Dus de toets die voor $\bar{X} \geq c$ verwerpt met onbetrouwbaarheid α_0 is de MP-toets.

Opgave 5

a. Toetsingsprocedure toegepast:

1. Model: *(het gaat hier om twee onafhankelijke steekproeven, 1 uit de grote steden en 1 uit de plattelandgemeenten , waarbij de variabele legeskosten worden gemeten. We veronderstellen voor beide populaties normale verdelingen met onbekende μ's (μ_1 resp. μ_2) en onbekende en <u>gelijke</u> σ's: $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$!!)*
   $X_1, \ldots, X_8$ is een aselecte steekproef van N $((\mu_1, \sigma^2)$ en $Y_1, \ldots, Y_8$ is een aselecte steekproef van N $((\mu_2, \sigma^2)$ en $X_1, \ldots, X_8, Y_1, \ldots, Y_8$ o.o.
2. Toets $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ tegen $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ met $\alpha_0 = 0.10$
3. Toetsingsgrootheid: $T = \dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}$ met $S^2 = \frac{m-1}{m+n-2}S_X^2 + \frac{n-1}{m+n-2}S_Y^2$ en m = n = 8
4. T $\cong$ T(m+n-2) = T(14) onder H_0.
5. Waargenomen is $t = \dfrac{491.625 - 452.375}{\sqrt{\frac{79.461^2}{2}+\frac{57.859^2}{2}}\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}} \approx 1.14$
6. Tweezijdige toets: $P(|T(14)| \geq t) \leq \alpha_0$,dan H_0 verwerpen.
   De overschrijdingskans $P(|T(14)| \geq t) = 2\times P(T(14) \geq 1.14) > 2\times P(T(14) \geq 1.35) = 20\%$

   (Via kritieke waarde: $|t| \geq c$, dan H_0 verwerpen.
   Hierin is c = 1.76 uit de T(14)-tabel met staartkans $P(T(14) \geq c) = \alpha_0/2 = 0.05$).
7. De overschrijdingskans $> \alpha_0 = 10\%$, dus H_0 <u>niet</u> verwerpen
   (Via kritieke waarden: t = 1.14 ligt tussen de kritieke waarden -1.76 en + 1.76, dus H_0 niet verwerpen.)
8. Conclusie met onbetrouwbaarheid 10%: in grote steden verschillen legeskosten voor (ver)bouwingen niet aantoonbaar van die van plattelandgemeenten.

b. De Rangsomtoets van Wilcoxon is het niet-parametrische alternatief
We ordenen de 8+8 waarnemingen en bepalen de rangnummers van de waargenomen legeskosten bij de 8 steden: $W=\sum r(x_i) = 2 + 4.5 + 6 + 10 + 12 + 13 + 14 + 16 = 77.5$

waarneming	381	397	402	410	410	428	450	451	457	500	501	511	519	528	560	640
rangnummer	1	2	3	4.5	4.5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Stad		*			*	*				*		*	*	*		*

Er is één knoop 410 van twee waarnemingen met gemiddeld rangnummer (4+5)/2 = 4.5

W is bij benadering normaal verdeeld met $\mu_W = \dfrac{m(N+1)}{2} = \dfrac{8\times(16+1)}{2} = 68$ en

$$\sigma^2{}_W = \frac{1}{12}\frac{mn(N^3 - \sum t_i^3)}{N(N-1)} = \frac{1}{12}\frac{8\times 8\times(16^3 - 6\times 1 - 2^3)}{16(16-1)} \approx 90.71 \text{ dus } \sigma_W = 9.524$$

(vergelijk formule zonder knopen geeft $\sigma_W = 9.522$)

We toetsen H_0: "De verdelingen van de legeskosten zijn gelijk"
tegen H_a: "De verdelingen zijn ten opzichte van elkaar verschoven" met $\alpha_0 = 0.10$
Dus een tweezijdige toets:

Overschrijdingskans = $2\times P(W \geq 77.5) = 2\times P(\frac{W-68}{9.524} \geq \frac{77.5-68}{9.524}) \approx 2\times[1 - P(Z \leq 1.00)]$
$= 31.74\% > \alpha_0 = 0.10$, dus H_0 niet verwerpen: de zelfde conclusie als bij a.