Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Afdeling der Toegepaste Wiskunde
Universiteit Twente

Datum: 24 oktober 2008
Kenmerk: TW03/SK/080/4k

Tentamen Wiskundige Statistiek (153038)
Vrijdag 2 november 2007 van 9.00-12.00 uur

N.B. Tot één uur na aanvang van het tentamen kunt u besluiten alsnog van deelname af te zien. U moet uw werk dan wèl afgeven aan de surveillant, maar als u erop vermeld heeft "AFGEZIEN VAN DEELNAME", wordt het niet beoordeeld.

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven, tabellen en **enige formules (zie na opgave 5)**
Motiveer steeds uw antwoorden.
Vermeld ook uw studentnummer op werk en tentamenbriefje.

Opgave 1
Een producent van standaardwerkplek PC's beweert dat afnemers zijn PC's gemiddeld langer in gebruik hadden dan de 5 jaar, die in de computerwereld als gemiddelde geldt voor dit type PC's. Het blad "Computerwereld" wil na overleg met de producent middels een aselecte steekproef van 10 ex-gebruikers van standaardwerkplek PC's van deze producent nagaan of deze gelijk heeft met zijn claim. De gemeten gebruiksduren van de 10 PC's (bepaald in tienden van jaren nauwkeurig) bedragen:

4.3, 5.9, 6.3, 5.1, 4.9, 5.8, 5.9, 5.8, 3.3, 4.7

a. Ga m.b.v. een geschikte toets na of de verwachte gebruiksduur van dit type PC's aantoonbaar meer dan 5 jaar bedraagt met een onbetrouwbaarheid van 5%. (Geef een geschikt model voor de waarnemingen, de hypothesen, toetsingsgrootheid en verdeling, kritiek gebied en conclusies).
b. Geef (in twee decimalen nauwkeurig) een 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de variantie van de gebruiksduren van dit type PC's.
c. Voor welke waarden van σ_0^2 kunnen we nulhypothese H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ tegen H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ niet verwerpen op basis van het in b. bepaalde interval. Met welke onbetrouwbaarheid? (Als u het interval onder b niet heeft bepaald, kunt u uitgaan van het interval (0.4, 3.0) .)

Opgave 2
De jaarlijkse rendementen (in %) van bepaalde technologiefondsen blijken goed gemodelleerd te kunnen worden als normaal verdeelde stochastische variabelen. Bovendien blijken het verwachte jaarrendement en de standaardafwijking van het rendement gelijk te zijn, dus $\mu = \sigma$. Op basis van een aselecte steekproef van n jaarrendementen $X_1, \ldots, X_n$ van zo'n fonds, InnoTechno, wil men nu uitspraken doen over het verwachte jaarrendement μ van dat fonds. We beschouwen nu de klasse van schatters $Y = a\overline{X}$ voor μ, waarbij a een (positief) reëel getal is.

a. Voor welke waarde(n) van a is Y een zuivere schatter van μ?

b. Voor welke waarde(n) van a is Y de beste schatter van μ , met als criterium de verwachte kwadratische fout (MSE)?
c. Zijn de onder a en b gevonden schatters consistent?

Opgave 3
Gegeven is de kansdichtheid van X met parameter $\vartheta > 0$:

$f(x) = \frac{1}{\vartheta} e^{-\frac{x}{\vartheta}}$, voor $x \geq 0$ (en $f(x) = 0$ voor $x < 0$)

We hebben de beschikking over een aselecte steekpoef $X_1, \ldots, X_n$ van X

a. Leid af dat $\overline{X}$ de meest aannemelijke schatter van ϑ is.

We willen m.b.v. toetsingsgrootheid $\overline{X}$ de nulhypothese $\vartheta = 1$ toetsen tegen het alternatief dat $\vartheta > 1$, met $\alpha_0 = 0.01$.

b. Bereken (benader) de kritieke waarde(n) als functie van n. Ga daarbij uit van voldoende grote n zodat de Centrale Limiet Stelling toegepast kan worden.
c. Voor welke waarden van n is het onderscheidend vermogen van de toets voor $\vartheta = 2$ minimaal 95%?
d. Toon aan dat de toets consistent is.

Opgave 4
We gaan nogmaals uit van een aselecte steekproef uit de verdeling zoals gegeven in opgave 3, maar toetsen nu H_0: $\vartheta = 1$ tegen H_1: $\vartheta = 2$ met $\alpha_0 = 0.01$. Leid met behulp van het lemma van Neyman en Pearson af dat de bij opgave 3 gekozen toets de meest onderscheidende (MP-) toets is.

Opgave 5
Een student moet een scriptie schrijven over de verschillen in gemeentelijke belastingtarieven. Hierover zijn nog geen gegevens beschikbaar. Hij voert daartoe een onderzoek uit: op basis van een tweetal aselecte steekproeven van 8 steden (> 100.000 inwoners) en 8 plattelandgemeenten tracht hij een uitspraak te doen over mogelijke verschillen in gemeentelijke tarieven.
De resultaten hebben betrekking op de leges voor bouwplannen ter waarde van € 20.000 en zijn als volgt gepresenteerd (in €):

nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	$\overline{x}$	s
Stad	500	528	640	428	397	410	519	511	491.6	79.5
platteland	410	458	501	450	402	457	381	560	452.4	57.9

a. Voer een t-toets uit met $\alpha_0 = 0.10$ waaruit blijkt of de betreffende leges in steden en op het platteland verschillen. Geef het model voor de waarnemingen, hypothesen, toetsingsgrootheid en verdeling, bereken de **overschrijdingskans** (u mag volstaan met een afschatting) en trek daaruit conclusies.

b. Stel dat de student twijfelt aan de juistheid van de normaliteitaanname en de voorkeur geeft aan een verdelingsvrije toets. Geef voor de toepasselijke toets de waarde van de toetsingsgrootheid, de overschrijdingskans (via normale benadering) en de conclusie die u daaruit trekt.

Enige formules bij tentamen wiskundige statistiek van 2 november 2007

- Normale kansdichtheid: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$
- Exponentiële verdeling: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$

  $E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ en $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$
- Normale benadering van de rangsom van Wilcoxon:

  Zonder knopen: N($\frac{1}{2}m(N + 1), \frac{1}{12} mn(N+1)$)

  Met knopen: N($\frac{1}{2}m(N + 1), \frac{1}{12}\frac{mn(N^3 - \sum t_i^3)}{N(N-1)}$)

Normering:

1			2			3				4	5		Totaal	Eindcijfer = 1 + 9×aantal punten/44 + evt. bonuspunt
a	b	c	a	b	c	a	b	c	d		a	b		
6	3	2	2	3	3	3	3	3	3	3	6	4	44	

Tabellen: B(n, p)-, Poisson-, N(0,1)-, Student-, chikwadraat- en F-tabellen