Uitwerking **Tentamen Wiskundige Statistiek (153038),** vrijdag 31 oktober 2008

Opgave 1

a. 95%-BI(μ)= $(\bar{x}-c\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+c\frac{s}{\sqrt{n}}) \approx (55.9,\ 60.1)$,

waarin $n = 12$, $\bar{x} = 58$, $s^2 = 11$

en c uit de $T(12\text{-}1)$-tabel, zodat $P(T(11) < c) = 0.975$, dus $c = 2.20$

b. $11\frac{S^2}{\sigma^2} \sim W(12\text{-}1)$, dus uit de chikwadraat-tabel volgt $A = 19.7$

$$P(11\frac{S^2}{\sigma^2} < A) = P(\sigma^2 > \frac{11S^2}{A}) = P(\sigma > \sqrt{\frac{11S^2}{A}}) = 95\%$$

Dus 95%-BI(σ) = $\left(\sqrt{\frac{11s^2}{19.7}}, \infty\right) \approx (2.48, \infty)$

Opgave 2 (Bij een som/product is de index, i = 1 t/m n, steeds weggelaten)

a. $E\left(\frac{1}{n}\sum\frac{X_i}{c_i}\right) = \frac{1}{n}\sum\frac{E(X_i)}{c_i} = \frac{1}{n}\sum\frac{c_i\theta}{c_i} = \frac{1}{n}\times n\theta = \theta$ De schatter is dus zuiver.

$$var\left(\frac{1}{n}\sum\frac{X_i}{c_i}\right) = \frac{1}{n^2}\sum\frac{var(X_i)}{c_i^2} = \frac{1}{n^2}\sum\frac{c_i\theta}{c_i^2} = \frac{\theta}{n^2}\sum\frac{1}{c_i}$$

b. We gaan uit van een realisatie $x_1, \ldots, x_n$ van een aselecte steekproef $X_1, \ldots, X_n$ van X.

$L(\theta) = \Pi P_\theta(X_i = x_i) = \dfrac{\left(\prod_i c_i^{x_i}\right)\times\theta^{\sum x_i}\times e^{-\theta\sum c_i}}{x_1!\cdot\ldots\cdot x_n!}$, met $\theta > 0$

$\ln L(\theta) = constante + \Sigma x_i \ln(\theta) - \theta\,\Sigma c_i$

Dus $\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta) = \frac{\sum x_i}{\theta} - \Sigma c_i = 0$ als $\theta = \theta^* = \frac{\sum x_i}{\sum c_i}$.

Dit is de m.a. schatting van θ omdat de afgeleide positief is tussen 0 en θ^* en negatief voor $\theta > \theta^*$. *(Volgt ook uit* $\frac{d^2}{d\theta^2}\ln L(\theta) = -\frac{\sum x_i}{\theta^2} < 0$ *voor alle* $\theta > 0$*)*

Dus $\hat{\theta}_n = \frac{\sum X_i}{\sum c_i}$ is de m.a. schatter van θ.

c. $E(\hat{\theta}_n) = \frac{\sum E(X_i)}{\sum c_i} = \frac{\sum c_i\theta}{\sum c_i} = \theta$. Dus $\hat{\theta}_n$ is een zuivere schatter van θ.

$$var(\hat{\theta}_n) = \frac{\sum var(X_i)}{(\sum c_i)^2} = \frac{\sum c_i\theta}{(\sum c_i)^2} = \frac{\theta}{\sum c_i}$$

d. Omdat $\hat{\theta}_n$ is een zuivere schatter van θ *is,* volgt uit $\lim_{n\to\infty} var(\hat{\theta}_n) = 0$ de consistentie:

$c_i \geq c > 0 \Rightarrow \Sigma c_i \geq nc \Rightarrow var(\hat{\theta}_n) = \frac{\theta}{\sum c_i} \leq \frac{\theta}{nc} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} var(\hat{\theta}_n) = 0$

e. n=2: $\frac{1}{2}\sum\frac{X_i}{c_i}$ en $\hat{\theta}_2$ zijn beiden zuivere schatters, dus $\hat{\theta}_2$ is beter als zijn variantie kleiner is. Dit is het geval als $\theta/(c_1+c_2) < \frac{1}{4}\theta(1/c_1+1/c_2) = \theta\frac{(c_1+c_2)}{4c_1c_2}$ ofwel als:

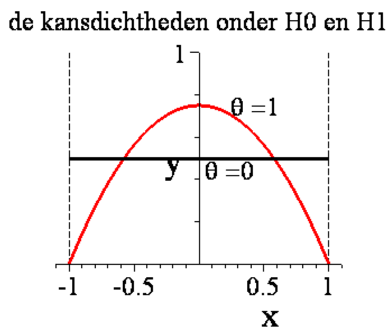
$4c_1c_2 < (c_1+c_2)^2$, dus als $0 < c_1 + c_2 - 2c_1c_2 = (c_1 - c_2)^2$. Dit is waar voor alle $c_1 \neq c_2$.

Voor $c_1 \neq c_2$ is $\hat{\theta}_2$ de beste schatter, voor $c_1 = c_2$ zijn ze even goed.

Opgave 3

a. $f_0(x) = ½$ voor $|x| \le 1$ en

$f_1(x) = ¾\,(1 - x^2)$ voor $|x| \le 1$



Neyman-Pearson's $T = \dfrac{f_1(x)}{f_0(x)} = \dfrac{\frac{3}{4}(1-x^2)}{1/2} = \frac{3}{2}(1-x^2)$ voor $|x| \le 1$

T neemt grote waarden aan voor kleine waarden van $|x|$: de toets die verwerpt voor kleine waarden van $|X|$ is volgens Neyman-Pearson dus de MP-toets.

b. $P_0\,(|X| \le c) \le \alpha_0$, dus wegens symmetrie geldt: $2 \times \int_0^c f_0(x)dx = 2 \times \frac{1}{2}c \le \alpha_0$ ofwel $c = \alpha_0$.

De toets luidt dus: als $|X| \le \alpha_0$, dan H_0 verwerpen. (Kritiek gebied $Z = \{x|\ -\alpha_0 \le x \le \alpha_0\}$)

c. Voor $\theta = 0$ is $\beta(\theta) = P_0\,(|X| \le \alpha_0) = \alpha_0$

voor $\theta = 1$ geldt: $\beta(\theta) = P_1\,(|X| \le \alpha_0) = 2 \times \int_0^{\alpha_0} f_1(x)dx = 2 \times \int_0^{\alpha_0} (\frac{3}{4} - \frac{3}{4}x^2)dx$

$$= 2 \times (\tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{4}x^3)\Big|_{x=0}^{x=\alpha_0} = \tfrac{3}{2}\alpha_0 - \tfrac{1}{2}\alpha_0^{\,3}$$

De bovengrens van $\beta(\theta)/\alpha_0$ is dus $\max\limits_{0<\alpha_0<1} \{\, 1\,,\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\alpha_0^{\,2} \,\} = \frac{3}{2}$, als α_0 daalt naar 0.

Opgave 4

a. X is het aantal overschrijdingen van de een-minuutsnorm in de steekproef:

X is $B(225, p)$-verdeeld met onbekende kans p op overschrijding.

Toets $H_0: p = 0.10$ tegen $H_1: p > 0.10$, met $\alpha_0 = 0.05$.

Toetsingsgrootheid is X , die onder H_0 $B(225,0.10)$-verdeeld is, en de waargenomen waarde $X = 40$

Het is een rechtseenzijdige toets: $\boxed{\text{als } X \ge c\text{, dan } H_0 \text{ verwerpen}}$

eis: $P(X \ge c \mid p = 0.1) \le 5\%$ met $X \sim B(225,0.10)$

Normale benadering: $X \sim N(np, np(1-p)) = N(22.5, 20.25)$.

Uitwerking:

$P(X \ge c) = P(X > c - 0.5)$ (continuïteitscorrectie)

$$= P\left(Z > \frac{c - 0.5 - 22.5}{\sqrt{20.25}}\right) \le 5\% \text{ met } Z = \frac{X - 22.5}{4.5} \sim N(0,1) \text{ (benadering CLS)}$$

$N(0,1)-tabel \Rightarrow \dfrac{c-23}{4.5} \geq 1.645 \Rightarrow c \geq 23+1.645\times 4.5 = 30.4025$ Kies dus $c = 31$

Conclusie: waarneming X = 40 ligt in het kritiek gebied $\Rightarrow H_0$ verwerpen

Ofwel: we achten het bewezen, bij onbetrouwbaarheidsdrempel 5%, dat Microhard niet voldoet aan de de een-minuutsnorm.

(M.b.v. de overschrijdingskans: $\boxed{\textit{Als } P(X \geq 40 \mid p = 0.1) \leq 5\%\textit{, dan } H_0 \textit{ verwerpen}}$

$P(X \geq 40 \mid p = 0.1) = P(X > 39.5 \mid p = 0.1)$ *(continuïteitscorrectie)*

$= P\left(Z > \dfrac{39.5-22.5}{4.5}\right)$ *met* $Z = \dfrac{X-22.5}{4.5} \sim N(0,1)$ *(benadering)*

$= P(Z > 3.78) = 1 - P(Z \leq 3.78) < 0.0001 \approx 0.0\%$.

De overschrijdingskans (veel) kleiner dan 5% $\Rightarrow H_0$ *verwerpen)*

b. $\beta(0.2) = P(X \geq 31 \mid p = 0.2) = P[(X-45)/\sqrt{36} \geq (31-0.5-45)/\sqrt{36} \mid p = 0.2)]$
$\approx 1 - \Phi(-2.42) = \Phi(2.42) = 0.9922$

Opgave 5

a. Waarnemingen: 17.41, 27.55, 36.19, 44.43, 45.15, 46,18, 65.83, 72.94, 82.53, 88.02

We voeren een binomiale toets op het aantal waarnemingen groter dan 70 uit

We toetsen $H_0 : M = 70$ $(p = 0.5)$ tegen $H_1 : M \neq 70$ $(p \neq 0.5)$, met $\alpha_0 = 0.025$.

N_+ is het aantal waarnemingen groter dan 70: $N_+ \sim B(10, p)$, met $p = P_M(X > 70))$

Onder H_0 is $E(N_+) = 5$. We verwerpen H_0 dus voor grote waarden van $|N_+ - 5|$ (ofwel: voor grote en voor kleine waarden van N_+).

Waargenomen is $N_+ = 3$. De overschrijdingskans is $P_{p=½}(|N_+ - 5| \geq |3-5|)$, ofwel:

overschrijdingskans $=2\times P_{p=½}(N_+ \leq 3) = 2\times P(B(10, ½) \leq 3)] = 0.3438$ (tabel of GR) $> \alpha_0$

Bij onbetrouwbaarheidsdrempel 0.025 kunnen we dus niet stellen dat de mediaan van 70 afwijkt.

(Bovenstaande toets kunnen we ook uitvoeren m.b.v. de kritieke waarden.

We vinden analoog: $P_{p=½}(N_+ \leq c_1) \leq ½\alpha_0 = 0.0125$ dus $c_1 = 1$,

want $P(B(10, ½) \leq 2) = 0.0547$ en $P(B(10, ½) \leq 1) = 0.0107$.

Uit $P_{p=½}(N_+ \geq c_2) \leq 0.0125$ of uit symmetrie volgt $c_2 = 9$.

Het kritieke gebied bestaat uit die waarnemingen waarvoor van N_+ in {0, 1, 9, 10})

b. Een 97.5%-betrouwbaarheidsinterval voor M bestaat uit die waarden M_0 van M waarvoor de nulhypothese $M = M_0$, bij de gegeven waarnemingen en $\alpha_0 = 0.025$, niet verworpen wordt ten gunste van het alternatief $M \neq M_0$.

Dus m.b.v. de kritieke waarden c_1 en c_2 uit a geldt:

M in $\{ M_0 \mid H_0$ niet verwerpen$\} = \{ M_0 \mid N_+ \leq 1$ of $N_+ \geq 9\} = \{ M_0 \mid 27.55 < M_0 < 82.53\}$

97.5%-BI (M) = (27.55, 82.53).