Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Afdeling der Toegepaste Wiskunde
Universiteit Twente

Datum: 10 februari 2013
Kenmerk: EWI08/TW/SP/092/WA-DM/tk

Tentamen Wiskundige Statistiek (153038)
Vrijdag 31 oktober 2008 van 9.00-12.00 uur

N.B. Tot één uur na aanvang van het tentamen kunt u besluiten alsnog van deelname af te zien. U moet uw werk dan wèl afgeven aan de surveillant, maar als u erop vermeld heeft "AFGEZIEN VAN DEELNAME", wordt het niet beoordeeld.

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven. De tabellen zijn separaat bijgevoegd.. Motiveer steeds uw antwoorden. Vermeld ook uw studentnummer op werk en tentamenbriefje.

Opgave 1
Bij de bepaling van de sterkte van een garen onderwerpt men 12 monsters aan een test. De tijd die verloopt tot het garen breekt is een stochastische variabele T met een $N(\mu,\sigma^2)$-verdeling. Voor de 12 monsters vinden we

$$\bar{x} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} t_i = 58 \qquad \text{en} \qquad s^2 = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{12}(t_i - \bar{x})^2 = 11.$$

a. Bepaal een 95% betrouwbaarheidsinterval voor μ.

b. Geef een A zodat $P(11\frac{S^2}{\sigma^2} < A) = 95\%$ en leid hieruit een naar beneden begrensd betrouwbaarheidsinterval voor de standaardafwijking σ af.

Opgave 2
$X_1, X_2,..., X_n$ zijn onderling onafhankelijk. X_i heeft de Poisson-verdeling met parameter $c_i\theta$, $c_i > 0$ bekend en $\theta > 0$ onbekend. (Dit probleem kan zich b.v. voordoen bij het tellen van het aantal bacteriën in kweken die gebaseerd zijn op verschillende verdunningen.Gegeven is verder de Poisson-verdeling: $P(X{=}k) = \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$, $k = 0,1,\ldots$ zodat $E(X) = var(X) = \mu$).

a. Laat zien dat $(\sum_{i=1}^{n} X_i / c_i)/n$ een zuivere schatter is van θ en bepaal de variantie van deze schatter.

b. Toon aan dat $\hat{\theta}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i / \sum_{i'=1}^{n} c_i$ de meest aannemelijke schatter van θ is.

c. Laat zien dat $\hat{\theta}_n$ ook een zuivere schatter is van θ en bepaal de variantie van deze schatter.

d. Ga na dat $\hat{\theta}_n$ consistent is. (Neem aan dat $c \le c_i \le C$ voor alle i, $0 < c < C$ constant.)

e. Welk van deze twee schatters verdient de voorkeur voor $n = 2$?

Opgave 3
De dichtheid f_θ van de stochastische variabele X is voor $0 \le \theta \le 1$ gegeven door

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 3(1-\theta x^2)/(6-2\theta), & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

a. Bepaal m.b.v. het lemma van Neyman-Pearson de MP-toets gebaseerd op de steekproef X (van 1 waarneming) voor $H_0 : \theta = 0$ tegen $H_1 : \theta = 1$. Schets eerst f_0 en f_1.
b. Bereken de kritieke waarde voor gegeven α_0.
c. Bepaal het onderscheidend vermogen $\beta(\theta)$ als functie van α_0 en bepaal de kleinste bovengrens van $\beta(\theta)/\alpha_0$.

Opgave 4
De Consumentenbond doet onderzoek naar de kwaliteit van de dienstverlening van helpdesks van soft- en hardware leveranciers. De Consumentenbond hanteert als kwaliteitseis dat hoogstens één op de 10 willekeurige telefoontjes leidt tot een wachttijd van meer dan één minuut (dit wordt de één-minuutsnorm genoemd). Tijdens het onderzoek wordt de helpdesk van "Microhard" op 225 willekeurige momenten gebeld: in 40 van de 225 gevallen moest langer dan één minuut gewacht worden.

a. Kan de consumentenbond claimen dat Microhard niet aan de kwaliteitseis voldoet? Voer voor de beantwoording van deze vraag een toepasselijke toets uit met onbetrouwbaarheidsdrempel 0.05 (geef kansmodel, hypothesen, toetsingsgrootheid, verdeling, kritiek gebied en conclusies).
b. Bereken het onderscheidend vermogen van de toets onder a. als in werkelijkheid (gemiddeld) 2 van de 10 telefoontjes niet voldoet aan de één-minuutsnorm.

Opgave 5
Een aselecte steekproef ter grootte 10 uit een continue verdeling heeft de volgende uitkomsten opgeleverd:

17.41, 82.53, 36.19, 27.55, 72.94, 44.43, 46.18, 65.83, 88.02, 45.15.

Zij M de mediaan van de verdeling (dus $P(X > M) = P(X < M) = 1/2$).

a. Toets $H_0 : M = 70$ tegen $H_1 : M \ne 70$ bij $\alpha_0 = 0.025$.
b. Bepaal een tweezijdig betrouwbaarheidsinterval voor M met $\gamma = 0.975$.

Normering:

1		2					3			4		5		Totaal	Eindcijfer = 1 + 9×aantal punten/43 + evt. bonuspunt
a	b	a	b	c	d	e	a	b	c	a	b	a	b		
4	4	2	2	2	2	2	3	3	3	4	4	4	4	43	

Tabellen (separaat): B(n, p)-, Poisson-, N(0,1)-, Student-, chikwadraat- en F-tabellen