Opgave 1

a. $f(x) = \frac{1}{\theta}$ voor $\theta < x < 2\theta$, dus $E(X) = \frac{\theta+2\theta}{2} = \frac{3}{2}\theta$ en var(X) = $\frac{\theta^2}{12}$

Aannemelijkheidsfunctie $L(\theta) = \prod f(x_i) = \frac{1}{\theta^n}$ voor $\theta < x_i < 2\theta$

Dus $\theta < \min x_i$ en $\max x_i < 2\theta$, ofwel: $\frac{1}{2}\max x_i < \theta < \min x_i$

$L(\theta)$ is een dalende functie omdat $L`(\theta) = -\frac{n}{\theta^{n-1}} < 0$

$L(\theta)$ is dus maximaal in het randpunt $\frac{1}{2}\max(x_1,..., x_n)$

$\Rightarrow \theta^* = \frac{1}{2}\max(X_1,..., X_n)$.

b. $T = a\sum_{i=1}^{n} X_i$ is zuiver als $E(T) = E\left(a\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = a\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = a \times n \times \frac{3}{2}\theta = \theta \Rightarrow a = \frac{2}{3n}$

c. T is een zuivere schatter van θ:

als bovendien $\lim_{n\to\infty} var(T) = 0$,dan is T een consistente schatter van θ

$$var(T) = var\left(a\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = a^2\sum_{i=1}^{n} var(X_i) = \frac{4}{9n^2} \times n \times \frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{27n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} var(T) = 0$$

Opgave 2

a. 95%-BI(μ)= $(\bar{x} - c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + c\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, met $\Phi(c) = 0.975$ dus c =1.96

Interval breedte = $2c\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2 \times 1.96 \times 5}{\sqrt{n}} \le 1$ ofwel $n \ge 19.6^2 = 384.15$

b. Rechtseenzijdig kritiek gebied:

$P(\bar{X} \ge c \mid \mu = 0) = \alpha_0 = 0.025$ ofwel $\Phi(\frac{c - 0}{5/\sqrt{n}}) = 0.975 \Rightarrow c = \frac{5 \times 1.96}{\sqrt{n}} = \frac{9.8}{\sqrt{n}}$

Onderscheidend vermogen in μ = 1 is minstens 0.90:

$P(\bar{X} \ge c \mid \mu = 1) \ge 0.90$ ofwel $\Phi(\frac{c - 1}{5/\sqrt{n}}) \le 0.1 \Rightarrow \frac{9.8/\sqrt{n} - 1}{5/\sqrt{n}} \le -1.28$

$1.96 - \frac{1}{5}\sqrt{n} \le -1.28$: $n \ge [(1.96 + 1.28) \times 5]^2 = 262.44 \Rightarrow n = 263$

Opgave 3

a. $s_X^2 = \frac{1}{m-1}\sum(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{m-1}(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2) = \frac{1}{24}\left(340 - 25\left(\frac{50}{25}\right)^2\right) = \frac{240}{24} = 10$

Evenzo**:** $s_Y^2 = \frac{1}{19}\left(201 - 20\left(\frac{50}{20}\right)^2\right) = \frac{76}{19} = 4$

b. **Als** $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, is $T = S_X^2 / S_Y^2$ F(25-1, 20-1)-verdeeld

Rechtseenzijdige toets: P(F(24, 19) ≥ c) = 0.05.

Tabel: c ligt tussen 2.04 en 2.33 (interpolatie c = 2.11)

$T = 10/4 = 2.5 > c \Rightarrow H_0$ verwerpen.

c. $s^2_{X,\mu=2} = \frac{1}{m}\sum(x_i - \mu)^2 = \frac{1}{m}(\sum x_i^2 - 2\mu\sum x_i + n\mu^2) = \frac{340}{25} - 4\times 2 + 4 = 9.6$

$s^2_{Y,\mu=2} = \frac{201}{20} - 4\times 2.5 + 4 = 4.05$

Als $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, is $T = S^2_{X,\mu=2} / S^2_{Y,\mu=2}$ F(25, 20)-verdeeld

Rechtseenzijdige toets: P(F(25, 20) ≥ c) = 0.05.

Tabel: c ligt tussen 2.04 en 2.12 (interpolatie c = 2.08)

$T = 9.6/4.05 = 2.37 > c \Rightarrow H_0$ verwerpen.

Opgave 4

a. $f_0(x) = 1/(1+x)^2$ voor $x > 0$ en $f_1(x) = 2/(2+x)^2$ voor $x > 0$

$T(x) = \frac{f_1(x)}{f_0(x)} = \frac{2/(2+x)^2}{1/(1+x)^2} = \frac{2(1+x)^2}{(2+x)^2}$ voor $x > 0$

T neemt grote waarden aan voor grote waarden van x, omdat

$T(x) = 2\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^2 = 2\left(1 - \frac{1}{2+x}\right)^2$ een stijgende functie is voor $x > 0$.

(of omdat $T(x)$ een stijgende functie is: $T'(x) = \frac{4(1+x)}{(2+x)^3} > 0$, als x > 0).

de toets die verwerpt voor grote waarden van X is volgens Neyman-Pierson dus de MP-toets: verwerp H_0 als $X \geq$ c.

$P_{\theta=1}(X \geq c) \leq 0.25$, als $\int_c^\infty \frac{1}{(1+x)^2}dx = \left[-(1+x)^{-1}\right]_c^\infty = \frac{1}{1+c} \leq 0.25 \Rightarrow c = 3$

waargenomen: $x = 4 >$ c, dus verwerp H_0

b. Een naar beneden begrensd betrouwbaarheidsinterval bij waargenomen $x = 4$:

75%-BI(θ) = { θ_0 | $H_0: \theta = \theta_0$ wordt niet verworpen ten gunste van $H_1: \theta > \theta_0$ met $\alpha_0 = 25\%$ }

$P_{\theta=\theta_0}(X \geq x) > 0.25$, als $\int_x^\infty \frac{\theta_0}{(\theta_0+u)^2}du = \left[-\theta_0(\theta_0 + u)^{-1}\right]_x^\infty = \frac{\theta_0}{\theta_0+x} > 0.25 \Rightarrow \theta_0 > \frac{1}{3}x$

x = 4, dus 75%-BI(θ) =$(\frac{4}{3},\infty)$.

Opgave 5

a. Parametervrije toets voor gepaarde waarnemingen: de tekentoets

X is het aantal positieve verschillen (voor – na): $X \cong B(8, p)$ met p = kans op verschil > 0

Waarneming 6 vervalt omdat het verschil 0 is.

Toets $H_0: p = 1/2$ tegen $H_1: p > 1/2$ (met α_0 = 0.05).

Toetsingsgrootheid is X , die onder H_0 $B(8, 1/2)$-verdeeld: waargenomen waarde X = 4

Het is een rechtseenzijdige toets: $\boxed{\text{als } X \geq c, \text{ dan } H_0 \text{ verwerpen}}$

eis: $P(X \geq c \mid p = 1/2) \leq 5\%$ Uit de tabel volgt dat c = 7

Conclusie: uitkomst X = 4 ligt niet in het kritiek gebied $\Rightarrow H_0$ niet verwerpen

(M.b.v. de overschrijdingskans: $\boxed{\text{Als } P(X \geq 4 \mid p = 1/2) \leq 5\%\text{, dan } H_0 \text{ verwerpen}}$

$P(X \geq 4 \mid p = 1/2) = 1 - P(X \leq 3 \mid p = 1/2) = 63.67\% > 5\%$, dus H_0 niet verwerpen)

Een effect van de vermageringskuur (namelijk afvallen) is niet aangetoond (op 5%-significantieniveau)

b. t-toets op het verwachte verschil μ bij gepaarde waarnemingen:

Veronderstel dat de 9 verschillen (voor – na) +8, -2, +8, -2, +8, 0, -3, -4, +5 een realisatie zijn van een aselecte steekproef $X_1, \ldots, X_9$ uit een N(μ, σ^2)-verdeling.

Toets $H_0: \mu = 0$ tegen $H_1: \mu > 0$ met $\alpha_0 = 0.05$

$$T = \frac{\overline{X}}{S/\sqrt{9}} \cong T(9-1) \text{ als } H_0: \mu = 0 \text{ waar is.}$$

$P(T \geq c \mid \mu = 0) \leq 5\%$, dus kritiek gebied Z = { $(x_1, \ldots, x_9) \mid T \geq 1.86$ }

$$t = \frac{\overline{x}}{s/\sqrt{9}} = \frac{2}{5.17/3} = 1.16 \notin Z \Rightarrow H_0 \text{ niet verwerpen.}$$

Een effect van de vermageringskuur (namelijk afvallen) is niet aangetoond (op 5%-significantieniveau)