Uitwerking **Tentamen Wiskundige Statistiek (153038),** vrijdag 29 oktober 2010

Opgave 1

a. Uit de tabel volgt onmiddellijk uit $P(\, W(n) < c_n\,) = 0.99$, dat $c_8 = 20.1$ en $c_{30} = 50.9$

b. We hebben voor deze berekening nodig: $E(Z^2)$ en $E(Z^4)$, waarin $Z \sim N(0, 1)$

$E(Z^2) = var(Z) + (EZ)^2 = 1 + 0 = 1$ en

$E(Z^4) = \int_{-\infty}^{\infty} z^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} = \cdots partieel\ integreren \ldots = 3$, dus $var(Z^2) = E(Z^4) - (EZ^2)^2 = 3 - 1 = 2$

Dus $EW(n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} E(Z_i^2) = n \times 1 = n$

En $varW(n) = var\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} var(Z_i^2) = n \times 2 = 2n$

c. $\sum_{i=1}^{n} Z_i^2$ is volgens de CLS (bij voldoende grote n) bij benadering $N(n, 2n)$-verdeeld

d. $P(W(n) \le c_n) = \Phi\left(\frac{c_n - n}{\sqrt{2n}}\right) = 0.99$ als $\frac{c_n - n}{\sqrt{2n}} \approx 2.33$, dus $c_n \approx n + 2.33\sqrt{2n}$

$n = 8$: $c_8 \approx 8 + 2.33\sqrt{16} = 17.32$

$n = 30$ $c_{30} \approx 30 + 2.33\sqrt{60} = 48.05$

e. De benadering van c_n m.b.v. de CLS is (relatief) beter voor grote n, dus voor $n = 30$.
Het procentuele (niet het absolute) verschil tussen 50.9 en 48.05 (n =30) is inderdaad kleiner dan bij n = 8. Toch is er ook bij n = 30 nog een aanzienlijk verschil in werkelijke en geschatte kritieke waarden bij kleine “staartkansen” van deze verdeling .

Opgave 2

a. $f(x) = -\frac{1}{\theta}$, voor $\theta < x < 0$ dus $E(X) = \frac{\theta}{2}$ en $var(X) = \frac{\theta^2}{12}$

dus de momentenschatter van $\theta = 2E(X)$ is $T_1 = 2\bar{X}$

b. De aannemelijkheidsfunctie is $L(\theta) = \prod f(x_i) = \left(-\frac{1}{\theta}\right)^n$ voor $\theta \le x_i < 0$ met $i = 1, \ldots, n$

Dus $\theta \le \min(x_1, \ldots, x_n) < 0$

$L(\theta)$ is een stijgende functie omdat $L`(\theta) = n\left(-\frac{1}{\theta}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\theta^2} > 0$, voor $\theta < 0$

$L(\theta)$ is dus maximaal in het randpunt $\hat{\theta} = \min(x_1, \ldots, x_n)$

$\Rightarrow T_2 = \min(X_1, \ldots, X_n)$ is de m.a. schatter van θ

De verdelingsfunctie van T_2 is

$F(x) = P(min(X_1, \ldots, X_n) \le x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i \ge x) = 1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^n$

dus $f(x) = -\frac{n}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}$, voor $\theta \le x \le 0$

c. $\boldsymbol{T_1}$ is een zuivere schatter van θ: $E(T_1) = E(2\bar{X}) = 2E(X) = 2 \times \frac{\theta}{2} = \theta$

Als bovendien $\lim_{n\to\infty} var(T_1) = 0$, dan is T_1 een consistente schatter van θ

En dit is het geval, want: $var(2\bar{X}) = 4var(\bar{X}) = 4 \times \frac{\theta^2/12}{n} = \frac{\theta^2}{3n} \to 0$ als $n \to \infty$

$$E(T_2) = \int_\theta^0 x f(x)dx = \int_\theta^0 -n\frac{x^n}{\theta^n}dx = -\frac{n}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{\theta^n}\Big]_{x=\theta}^{x=0} = +\frac{n}{n+1}\theta \quad \to \theta, \text{ als } n \to \infty,$$

dus $\boldsymbol{T_2}$ is geen zuivere schatter van θ, maar wel asymptotisch zuiver

$$E(T_2^2) = \int_\theta^0 x^2 f(x)dx = \int_\theta^0 -n\frac{x^{n+1}}{\theta^n}dx = -\frac{n}{n+2} \cdot \frac{x^{n+2}}{\theta^n}\Big]_{x=\theta}^{x=0} = +\frac{n}{n+2}\theta^2$$

Verder geldt: $var(T_2) = E(T_2^2) - (ET_2)^2 = +\frac{n}{n+2}\theta^2 - \left(\frac{n}{n+1}\theta\right)^2 = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2 \to 0$ als $n \to \infty$

T_2 is dus asymptotisch zuiver en de variantie gaat naar 0: T_2 is een consistente schatter van θ

d. Uit het gebruikelijke criterium, de verwachte kwadratische fout
$E(T-\theta)^2 = (ET-\theta)^2 + var(T)$ volgt:

$$E(T_1-\theta)^2 = (ET_1-\theta)^2 + var(T_1) = 0 + \frac{\theta^2}{3n} = \frac{\theta^2}{3n}$$

$$E(T_2-\theta)^2 = (ET_2-\theta)^2 + var(T_2) = \left(\frac{n}{n+1}\theta \;-\theta\right)^2 - \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2 = \frac{2}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2$$

Hieruit blijkt dat $E(T_2-\theta)^2 < E(T_1-\theta)^2$ voor n = 1, 2, …. . en voor alle waarden van θ.
Dus T_2 is de beste schatter van θ.

Opgave 3

a. Er is hier sprake van paarsgewijs afhankelijke waarnemingen: we bepalen dus de (wel o.o.) verschillen $x_1, \ldots, x_{10}$ per paar: -1, +6, -2, +10, +8, +8, +9, +8, -3, 17, zodat $\bar{x} = 6$ en $s^2 = 39\ 1/9$.
De toets is hieronder uitgewerkt in 8 stappen:

1. Model: de verschillen (voor – na) $X_1,\ldots,X_{10}$ zijn o.o. en $N(\mu, \sigma^2)$
2. We toetsen H_0: $\mu = 0$ (of $\mu \leq 0$) tegen H_1: $\mu > 0$ met $\alpha_0 = 0.05$
3. Toetsingsgrootheid T = $\frac{\bar{X}}{S/\sqrt{n}}$
4. T $\cong$ T(10-1) onder H_0 .
5. t = $\frac{6}{6.254/\sqrt{10}}$ ≈ 3.03
6. Als $T \geq c$, dan H_0 verwerpen. $P(T(9) \geq c) = 0.05$ dus c = 1.83
7. t = 3.03 > 1.83 = c, dus H_0 verwerpen.
8. Conclusie: gewichtsverlies is aangetoond met onbetrouwbaarheid van 5%.

b. De toets onder a verandert op de volgende punten:
2. We toetsen H_0: $\mu \leq 2$ tegen H_1: $\mu > 2$
3. Toetsingsgrootheid T = $\frac{\bar{X}-2}{S/\sqrt{n}}$
5. t = $\frac{6-2}{6.254/\sqrt{10}}$ ≈ 2.02
7. t = 2.02 > 1.83 = c, dus H_0 verwerpen.

c. Een naar beneden begrensd betrouwbaarheidsinterval voor het verwachte gewichtsverlies met $\gamma = 0.95$ bevat die waarden μ_0 waarvoor H_0: $\mu = \mu_0$ niet verworpen wordt tegen H_1: $\mu > \mu_0$ met α_0 = 1- 0.95. M.a.w. als T niet in het kritieke gebied $[c, \infty)$ ligt, dus als $\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{10}} < 1.83 (=c)$.
Hieruit volgt $\mu_0 > \bar{x} - 1.83 s/\sqrt{10} \approx 2.38$
Met betrouwbaarheid van 95% is het gewichtsverlies dus meer dan 2.38 kg.

Opgave 4

a. $f_0(x) = ½$ voor $-1 < x < 1$ en $f_1(x) = ¾ - ¾ x^2$ voor $-1 < x < 1$

$$T(x) = \frac{f_1(x)}{f_0(x)} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{4}x^2}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x^2 \quad \text{voor } -1 < x < 1$$

T neemt grote waarden aan voor kleine waarden van $|x|$,
De toets die verwerpt voor kleine waarden van $|X|$ is volgens het lemma van Neyman-Pearson dus de MP-toets: verwerp H_0 als $|X| \leq c$.

b. $P_{\theta=0}(|X| \leq c) \leq \alpha_0$, als $\int_{-c}^{c} \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}\cdot 2c \leq \alpha_0 \Rightarrow c = \alpha_0$
Dus verwerp H_0, als $|X| \leq \alpha_0$,

c. Het onderscheidend vermogen van de toets is $\beta(\theta) = P_\theta(|X| \leq c)$:
$\beta(0) = \alpha_0$ (zie b)

$$\beta(1) = 2\int_0^{\alpha_0} \frac{3}{4}(1-x^2)dx = \frac{3}{2}\cdot\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{x=0}^{x=\alpha_0} = \frac{3}{2}\cdot\left(\alpha_0 - \frac{1}{3}\alpha_0^3\right) = \frac{3}{2}\alpha_0 - \frac{1}{2}\alpha_0^3$$

Opgave 5

a. We kiezen als toetsingsgrootheid voor $\bar{Y} - \bar{X}$: dat is een zuivere schatter van Δ met variantie $var(\bar{Y} - \bar{X}) = var(\bar{Y}) + var(\bar{X}) = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$.

We willen Δ > 0 aantonen, dus we verwerpen H_0 voor grote waarden van $\bar{Y} - \bar{X}$:

$$P_{\Delta=0}(\bar{Y} - \bar{X} \geq c) \leq \alpha_0 = 0.01, \text{ dus } \Phi\left(\frac{c}{\sqrt{\frac{1}{90}+\frac{1}{10}}}\right) = 0.99 \text{ ofwel } c = 2.33\sqrt{\frac{1}{90}+\frac{1}{10}} = 0.777$$

De toets verwerpt H_0 als $\bar{Y} - \bar{X} \geq 0.777$

Opmerkingen:

1. Je kunt ook de (onder H_0 Δ = 0) standaardnormale $Z = \frac{\bar{Y}-\bar{X}}{\sqrt{\frac{1}{90}+\frac{1}{10}}}$ *als toetsingsgrootheid nemen maar dan verandert de kritieke waarde mee:c =0.777×* $\sqrt{\frac{1}{90}+\frac{1}{10}}$.

2.Als je als toetsingsgrootheid $\bar{X} - \bar{Y}$ neemt moet je linkseenzijdig toetsen, immers $E(\bar{X} - \bar{Y}) = -\Delta$.

b. De kans op een fout van de tweede soort voor Δ = 1 van de toets onder a. is

$$P_{\Delta=1}(\bar{Y} - \bar{X} \leq 0.777) = \Phi\left(\frac{0.777 - 1}{\sqrt{\frac{1}{90}+\frac{1}{10}}}\right) = 1 - \Phi(0.67) \approx 25.1\%$$

Dus groter dan de gewenste waarde (1%)

c. De kans op een fout van de tweede soort is het kleinst, indien de variantie van $\bar{Y} - \bar{X}$ het kleinst is. Dit is het geval als m = n = 50 (want $\frac{1}{x} + \frac{1}{100-x}$ heeft een minimum voor $x = 50$).

Dan vinden we als kritieke waarde $c = 2.33\sqrt{\frac{1}{50}+\frac{1}{50}} = \frac{2.33}{5} = 0.466$ en de bijbehorende kans op een fout van de tweede soort:

$$P_{\Delta=1}(\bar{Y} - \bar{X} \leq 0.466) = P\left(Z \leq \frac{0.466 - 1}{\sqrt{\frac{1}{50}+\frac{1}{50}}}\right) = 1 - \Phi(2.67) = 1 - 0.9962\% = 0.38\% < 1\%$$