

**Tentamen Wiskundige Statistiek (191530382)**  
**Vrijdag 29 oktober 2010 van 8.45-11.45 uur**

N.B. Tot één uur na aanvang van het tentamen kunt u besluiten alsnog van deelname af te zien. U moet uw werk dan wél afgeven aan de surveillant, maar als u erop vermeld heeft “AFGEZIEN VAN DEELNAME”, wordt het niet beoordeeld.

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven. **De tabellen zijn separaat bijgevoegd.**  
Motiveer steeds uw antwoorden.  
Vermeld uw naam en studentnummer op het in te leveren werk.

1. Zij  $Z_1, \dots, Z_n$  een aselechte steekproef uit een  $N(0,1)$ -verdeling en

$$W(n) = \sum_{i=1}^n Z_i^2.$$

- a. Zij  $c_n$  zodanig dat  $P(W(n) < c_n) = 0.99$ .  
Bepaal m.b.v. de tabel  $c_n$  voor zowel  $n = 8$  als  $n = 30$ .
- b. Bewijs dat  $EW(n) = n$ ,  $\text{var}(W(n)) = 2n$ .
- c. Leid vervolgens de normale benadering voor de verdeling van  $W(n)$  af.
- d. Bereken hiermee benaderingen voor  $c_8$  en  $c_{30}$ .
- e. Geef commentaar op de gevonden resultaten.

2. Zij  $X_1, \dots, X_n$  een aselechte steekproef uit een uniforme verdeling op  $(\theta, 0)$ , waarin  $\theta < 0$ .

- a. Bepaal een momentschatter  $T_1$  voor  $\theta$ .
- b. Vind de meest aannemelijke schatter  $T_2$  voor  $\theta$  en laat zien dat de kansdichtheid van  $T_2$  voor  $\theta < x < 0$  gegeven wordt door

$$f(x) = -nx^{(n-1)}/\theta^n.$$

- c. Ga voor  $T_1$  en  $T_2$  na of deze zuiver en/of consistent zijn.
- d. Aan welk van deze twee schatters geeft u de voorkeur en waarom?

3. Om het effect van een bepaalde vermageringskuur te bestuderen wordt van 10 proefpersonen het gewicht vóór en na de behandeling bepaald (afgerond in kilogrammen).

nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
voor	81	91	110	91	92	101	94	98	75	100
na	82	85	112	81	84	93	85	90	78	83

Neem aan dat de onderliggende verdelingen normaal zijn.

**Z.O.Z**

- a. Toets bij onbetrouwbaarheidsdrempel  $\alpha_0 = 0.05$  of de kuur effect heeft.
- b. Toets bij  $\alpha_0 = 0.05$  of de kuur ten minste een gemiddeld gewichtsverlies van 2 kg oplevert.
- c. Gebruik de bij a. en b. toegepaste toetsen om een naar beneden begrensd betrouwbaarheidsinterval te bepalen voor het gemiddelde gewichtsverlies met betrouwbaarheid  $\gamma = 0.95$ .

4. De dichtheid  $f_\theta$  van de stochastische variabele  $X$  is voor  $0 \leq \theta \leq 1$  gegeven door

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 3(1 - \theta x^2)/(6 - 2\theta), & |x| \leq 1, \\ 0 & , \quad |x| > 1. \end{cases}$$

- a. Schets  $f_0$  en  $f_1$  en bepaal de MP-toets gebaseerd op  $X$  (steekproefomvang  $n = 1$ ) voor  $H_0: \theta = 0$  tegen  $H_1: \theta = 1$ .
- b. Bereken de kritieke waarde voor gegeven  $\alpha_0$ .
- c. Druk het onderscheidend vermogen uit in  $\alpha_0$ .

5. Beschouw twee onderling onafhankelijke aselechte steekproeven uit normale verdelingen:  $X_1, \dots, X_m$  met verwachting  $\mu$  en variantie 1, en  $Y_1, \dots, Y_n$  met verwachting  $\mu + \Delta$  en variantie 1.

- a. Bepaal een toets voor  $H_0: \Delta \leq 0$  tegen  $H_1: \Delta > 0$  bij onbetrouwbaarheidsdrempel  $\alpha_0 = 0.01$  voor  $m = 90$  en  $n = 10$ .

Het is gewenst dat voor  $\Delta = 1$  de kans op een fout van de tweede soort hoogstens 0.01 is.

- b. Ga na of dit voor de hier gevonden toets het geval is.

Vervolgens is het toegestaan de proefopzet te wijzigen:  $m$  en  $n$  mogen anders gekozen worden, zolang het totaal  $N = m + n$  maar blijft voldoen aan  $N = 100$ .

- c. Ga na of op deze manier wel aan de gewenste bovengrens kan worden voldaan.

-----  
**Normering:**

1					2				3			4			5			
a	b	c	d	e	a	b	c	d	a	b	c	a	b	c	a	b	c	Totaal
1	2	1	1	1	1	3	4	1	3	2	2	3	2	2	3	2	2	36

Tentamencijfer = 1 + (aantal punten)/4 (+ evt. bonuspunt)