Uitwerking Tentamen Wiskundige Statistiek voor TW (191530382)
Vrijdag 2 november 2012, 13.45-16.45 uur

Opgave 1

a. Kansmodel: de levensduren X_1 t/m X_{10} van de banden zijn o.o. en alle N(μ,σ²)-verdeeld.
Toets $H_0: \mu = 57$ (of $\mu \geq 57$) tegen $H_1: \mu < 57$ (met α = 0.05)
Toetsingsgrootheid T = $\frac{\overline{X} - 57}{S/\sqrt{10}}$ is onder H_0 T(9)-verdeeld.
Met de rekenmachine vinden we: $\bar{x} = 54.1$ en $s^2 \approx 33.66$ ($s \approx 5.80$)
Waargenomen waarde: t = $\frac{54.1 - 57}{5.80/\sqrt{10}} \approx -1.58$
Linkseenzijdig Kritiek Gebied : verwerp H_0 als T ≤ c, zodat P(T(9) ≤ c) = 0.05, dus c = -1.83
t = -1.58 ligt niet in het KG dus H_0 *niet* verwerpen, dus de conclusie luidt: met onbetrouwbaarheidsdrempel van 5% is met deze meetgegevens statistisch niet aangetoond dat de claim van een levensduur van minstens 57000 km verworpen moet worden.

(Beslissing met (linker)overschrijdingskans P(T ≤ -1.58) = 1- P(T ≤ 1.58) ligt tussen 5% en 10%, dus groter dan 5% = α: H_0 niet verwerpen.)

b. 95%-BI(σ)= $\left(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{c_2}}, \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{c_1}}\right) \approx$ (4.0, 10.6)
Hierin zijn n =10, s^2 = 33.66 en c_1 = 2.70 en c_2 = 19.0, zodat P(W(9) ≤ c_1) = P(W(9) ≥ c_2) = 0.025.

Opgave 2

a. var(X) = E(X²) – (EX)², dus de momenten schatter is $\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} X_i^2 - \bar{X}^2$

$$E\left(\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} X_i^2 - \bar{X}^2\right) = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} E(X_i^2) - E(\bar{X}^2) = (var(X) + EX^2) - (var(\bar{X}) + E(\bar{X})^2)$$

$$= var(X) - \frac{var(X)}{n} \neq var(X)$$, dus deze schatter is niet zuiver.

Alternatieve oplossingen:

- $var(X) = \frac{1}{\lambda^2} = (EX)^2$, dus de momentenschatter = $(\bar{X})^2$
  Deze is niet zuiver want $E(\bar{X}^2) = var(\bar{X}) + E(\bar{X})^2 = \frac{1}{n\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \neq var(X)$ (n = 8)
- $E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$, dus $var(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{2}E(X^2)$: de momentenschatter = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} X_i^2$ is wel zuiver

b. De kansdichtheid wordt gegeven door $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, voor $x \geq 0$, dus de aannemelijkheidsfunctie is:
$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{8} \lambda e^{-\lambda x_i}$, ofwel: $L^*(\lambda) = lnL(\lambda) = 8\ln(\lambda) - \lambda \sum x_i$ (steeds met λ > 0)
$\frac{d}{d\lambda}L^*(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{\lambda} - \sum x_i = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{8}{\sum_{i=1}^{8} x_i} = {}^1\!/_{\bar{x}}$
Omdat $\frac{d^2}{d\lambda^2}L^*(\lambda) = -\frac{8}{\lambda^2} < 0$, dus L is maximaal voor $\lambda = {}^1\!/_{\bar{x}}$, dus $\bar{X}$ is de m.a. schatter van $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

c. $EY = cE(\bar{X}) = c(EX) = \frac{c}{\lambda}$ en $var(Y) = c^2 var(\bar{X}) = c^2\frac{var(X)}{n} = \frac{c^2}{8\lambda^2}$
dus de verwachte kwadratische fout is:
$E\left(Y - \frac{1}{\lambda}\right)^2 = \left(EY - \frac{1}{\lambda}\right)^2 + var(Y) = \frac{1}{\lambda^2}\left[(c-1)^2 + \frac{c^2}{8}\right]$, een functie van c > 0
Deze kwadratische functie in c (dalparabool) is het kleinst als de afgeleide 2(c-1) + 2c/8 = 0 ofwel $c = \frac{8}{9}$

Opgave 3

a. We toetsen $H_0: p \leq \frac{1}{2}$ tegen $H_1: p > \frac{1}{2}$ met
onder H_0 heeft X bij benadering een $N\left(400 \times \frac{1}{2}, 400 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) -$ verdeling.
α = $sup_{p \leq \frac{1}{2}} P(X \geq 215|p) = P\left(X \geq 215 \middle| p = \frac{1}{2}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{214.5 - 200}{10}\right)$
$= 1 - \Phi(1.45) = 1 - 0.9265 = 7.35\%$

b. $\beta(0.6) = P(X \geq 215|p = 0.6) \approx 1 - \Phi\left(\frac{214.5-240}{\sqrt{96}}\right) \approx \Phi(2.60) = 99.53\%$

Opgave 4

a. Er is hier sprake van paarsgewijs afhankelijke waarnemingen: we bepalen dus de (wel o.o.) verminderingen $z_1, \ldots, z_{10}$ per paar: +7.5, -2.5,+2.5, +3.5, +1.5, -0,5, -1.0, +4.5, +4.5, +1.5 met de gegeven $\bar{z} = 2.15$ en s = 3.000

We toetsen H_0: $\mu = 0$ tegen H_1: $\mu > 0$ met $\alpha_0 = 0.10$.

Hierin is μ het verwachte vermindering "verlies voor-na"

Toetsingsgrootheid $T = \frac{\bar{Z}}{S/\sqrt{10}}$ ($T \cong$ T(10-1) onder H_0)

Rechtseenzijdig kritiek gebied: als $T \geq c$, dan H_0 verwerpen. P(T(9) ≥ c) = 0.10 dus c = 1.38

(*Verder uitwerken van de toets is niet gevraagd, maar levert:*

$t = \frac{\bar{z}}{s/\sqrt{10}} = \frac{2.15}{3.00/\sqrt{10}} = 2.27 > 1.38$ *= c, dan H_0 verwerpen.*

Conclusie: vermindering van arbeidsurenverlies is aangetoond met een onbetrouwbaarheid van 10%.)

b. Een naar beneden begrensd betrouwbaarheidsinterval voor de verwachte vermindering van arbeidsurenverlies met $\gamma = 0.90$ bevat die waarden μ_0 waarvoor H_0: $\mu = \mu_0$ **niet** verworpen wordt tegen H_1: $\mu > \mu_0$ met $\alpha_0 = 1- 0.90$. M.a.w.: als T niet in het kritieke gebied [c, ∞) ligt, dus als $\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{10}} < 1.38 (= c)$

Hieruit volgt $\mu_0 > \bar{z} - \frac{1.38s}{\sqrt{10}} \approx 0.84$ (want $\bar{z} = 2.15$ en $s = 3.000$)

Het gevraagd interval is (0.84, ∞)

"Met betrouwbaarheid van 90% is de verwachte vermindering in arbeidsurenverlies minstens 0.84"

c. N^+ = het aantal positieve verschillen = 7 (van de 10 niet-nul verschillen)

We toetsen H_0: p = ½ tegen H_1: p > ½ met p = de kans op een positief verschil (= vermindering)

N^+ is onder H_0 B(10, ½)

Overschrijdingskans $P(N^+ \geq 7 \mid p = ½) = 1 - P(N^+ \leq 6 \mid p = ½) = 1 - 8281$ (tabel) = 0.1719 > $\alpha_0 = 0.10$, dus H_0 **niet** verwerpen.

Opgave 5

a. X heeft een geometrische verdeling met kansfunctie $f_p(x) = (1-p)^{x-1}p$ (0 < p < 1 en x = 1, 2, …)

De MP-toets is de toets die H_0 verwerpt voor grote $T = \frac{f_{1/3}(x)}{f_{1/6}(x)} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}\frac{1}{3}}{\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}\frac{1}{6}} = 2\left(\frac{6}{5} \times \frac{2}{3}\right)^{x-1} = 2\left(\frac{4}{5}\right)^{x-1}$,

dus voor kleine x: verwerp H_0 als $X \leq c$.

Omdat onder H_0 geldt dat $f_{p=\frac{1}{6}}(1) = \frac{1}{6}$ en $f_{p=\frac{1}{6}}(2) = \frac{5}{36}$, dus $P(X \leq 1) = \frac{1}{6} < \alpha_0$ en $P(X \leq 2) = \frac{11}{36} > \alpha_0$, luidt de MP-toets: verwerp H_0 als $X \leq 1$.

b. De aannemelijkheidsquotiënttoets is de toets die verwerpt voor kleine Λ met

$$\Lambda = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} \prod_{i=1}^n g(x_i, \theta)}{\sup_{\theta \in \Theta} \prod_{i=1}^n g(x_i, \theta)} = \frac{\prod_{i=1}^n f_{\lambda \leq 1}(x_i)}{\sup_{\lambda \leq 1} \prod_{i=1}^n f_p(x_i)} = \frac{\prod_{i=1}^n e^{-x_i}}{\sup\limits_{\lambda \leq 1} \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i}} = \frac{e^{-\sum x_i}}{\sup\limits_{\lambda \leq 1} \lambda^n e^{-\lambda \sum x_i}}$$

Omdat $\hat{\lambda} = 1/\bar{x}$ de m.a. schatting van λ is en het supremum bepaald moet worden voor $0 < \lambda \leq 1$ geldt:

$\Lambda = 1$ voor $\bar{x} \leq 1$ en $(\sum x_i = n\bar{x})$

$\Lambda = \frac{e^{-n\bar{x}}}{(1/\bar{x})^n e^{-n}} = \bar{x}^n e^{-n(\bar{x}-1)}$ voor $\bar{x} > 1$

Deze functie daalt voor toenemende $\bar{x} > 1$, bijv. omdat de afgeleide van $f(y) = y^n e^{-n(y-1)}$, $f`(y) = ny^{n-1}(1-y)e^{-n(y-1)} < 0$ als $y > 1$

"Verwerp H_0 voor kleine Λ" is dus gelijkwaardig met "Verwerp H_0 voor grote $\bar{X}$"