UNIVERSITEIT TWENTE

Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Tentamen Wiskundige statistiek (191530382) op vrijdag 2 november 2012, 13.45 – 16.45 uur.

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven en enkele formules (zie de laatste pagina).
Motiveer steeds uw antwoorden. De tabellen zijn separaat bijgevoegd. Een grafische rekenmachine is **niet** toegestaan, een wetenschappelijke (niet programmeerbare) wel.

---

1. Een taxibedrijf vermoedt dat de banden van een bepaald merk minder kilometers meegaan dan dat de leverancier claimt. De claim is dat de gemiddelde levensduur μ van de banden 57000 km (of meer bedraagt). Daartoe heeft het bedrijf de levensduur van een 10-tal banden (van 10 verschillende taxi's) gemeten en kwam men tot de volgende meetgegevens (in 1000 km):

   $$48, 53, 45, 61, 59, 56, 63, 49, 53, 54$$

   a) Voer een parametrische (normale) toets uit met $\alpha = 0.05$, waaruit blijkt of de claim van de leverancier op basis van deze meetgegevens verworpen kan worden. Welk statistisch model gebruik je daarbij?

   b) Geef een 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de standaardafwijking van de levensduur (in 1000 km) van een band.

2. $X_1, \ldots, X_8$ is een aselecte steekproef van X, een exponentieel verdeelde stochastische variabele met onbekende parameter λ (zie ook de formules m.b.t. de exponentiële verdeling onderaan het tentamen).

   a) Geef de momentenschatter van $\text{var}(X)$ en ga na of deze schatter zuiver is.

   b) Toon aan dat $\bar{X}$ de meest aannemelijke schatter van $E(X)$ is.

   c) Voor welke waarde van de constante $c > 0$ is de schatter $Y = c\bar{X}$ de beste schatter van $E(X)$?
   Opmerking: de "beste" in termen van de verwachte kwadratische fout

3. De studentenpartij UReka vermoedt dat een meerderheid van de huidige studenten voorstander is van de invoering van het Nieuwe Onderwijs Model aan de UT. Om dat vermoeden te bewijzen wordt het onderzoeksbureau NewCom gevraagd om op grond van een aselecte steekproef van $n = 400$ studenten een uitspraak hierover te doen. Tevoren wordt afgesproken dat indien van 400 studenten (die moesten aangeven of zij al dan niet voor invoering van het NOM zijn) er minstens 215 voor zijn, dit afdoende bewijs voor het vermoeden is.

   a) Geef de hypothesen van de beschreven toets en bereken de onbetrouwbaarheid bij het gegeven besliscriterium.

   b) Bereken het onderscheidend vermogen van de toets onder a. indien van de hele studentenpopulatie 60% voorstander zou zijn.

z.o.z.

4. Een nieuw pakket veiligheidsvoorschriften is onlangs geïmplementeerd in de chipindustrie. Het wekelijkse verlies aan arbeidsuren (gemiddelde over een maand) veroorzaakt door ongelukken in tien vergelijkbare fabrieken voor en na invoering van de veiligheidsvoorschriften is als volgt:

fabriek	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
voor (x)	30.5	18.5	24.5	32.0	16.0	15.0	23.5	25.5	28.0	18.0
na (y)	23.0	21.0	22.0	28.5	14.5	15.5	24.5	21.0	23.5	16.5

De meetgegevens zijn als volgt samengevat:

	x	y	$z = x - y$
Gemiddelde	23.15	21.00	2.15
Standaardafwijking	6.046	4.378	3.000

Het management wil nagaan of de nieuwe veiligheidsvoorschriften het verlies aan arbeidsuren hebben verminderd. Neem bij a. en b. aan dat de onderliggende verdelingen normaal zijn.

a) Indien we bij onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha_0 = 0.10$ willen toetsen of het pakket veiligheidsvoorschriften het verlies aan arbeidsuren verminderd heeft, geef dan de hypothesen, de toetsingsgrootheid en het kritiek gebied.

b) Leid een naar beneden begrensd betrouwbaarheidsinterval af voor de verwachte vermindering in uren (na invoeren van het pakket) met $\gamma = 0.90$.

c) Welke parametervrije toets kunnen we uitvoeren als de normaliteitaanname niet redelijk wordt geacht? Geef uitsluitend de toetsingsgrootheid, zijn verdeling, de waargenomen waarde en beslis aan de hand van de overschrijdingskans met $\alpha_0 = 0.10$.

5. a) Klaas vermoedt dat de dobbelsteen, die zijn tegenstander Erik bij mens-erger-je-niet gebruikt, zodanig verzwaard is dat de kans op 6 groter is dan bij een zuivere dobbelsteen. Om dit te testen gooit hij de dobbelsteen net zo lang op totdat hij 6 werpt. X is het aantal benodigde worpen en p is de kans op 6. Leid met behulp van het lemma van Neyman-Pearson de MP-toets af, indien we $H_0 : p = \frac{1}{6}$ tegen $H_1 : p = \frac{1}{3}$ willen toetsen met $\alpha_0 = 0.20$, op basis van één waarneming x van X

b) Leid de aannemelijkheidsquotiënttoets af voor de toets op $H_0 : \lambda = 1$ tegen $H_1 : \lambda < 1$ op basis van een aselecte steekproef $X_1, \ldots, X_n$ uit de exponentiële verdeling met parameter $\lambda > 0$. Laat zien dat de aannemelijkheidsquotiënttoets resulteert in het verwerpen van de nulhypothese als het steekproefgemiddelde groot genoeg is.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk	1a.	4 punten	Vraagstuk	1b	3 punten	Vraagstuk	2a.	2 punten
Vraagstuk	2b.	3 punten	Vraagstuk	2c.	3 punten	Vraagstuk	3a.	3 punten
Vraagstuk	3b.	2 punten	Vraagstuk	4a.	3 punten	Vraagstuk	4b.	2 punten
Vraagstuk	4c.	3 punten	Vraagstuk	5a	3 punten	Vraagstuk	5b.	3 punten

---

Enige formules bij het tentamen Wiskundige Statistiek

Exponentiële verdeling ($x \geq 0$):

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathrm{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} \text{ en } F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Geometrische verdeling ($x = 0, 1, 2, \ldots$):

$$P(X = x) = (1-p)^{x-1}p, \quad E(X) = \frac{1}{p}, \quad \mathrm{var}(X) = \frac{1-p}{p^2} \text{ en } P(X \geq x) = (1-p)^{x-1}$$

Aannemelijkheidsquotiënt:

$$\Lambda = \frac{\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} \prod\limits_{i=1}^{n} g(x_i, \theta)}{\sup\limits_{\theta \in \Theta} \prod\limits_{i=1}^{n} g(x_i, \theta)}$$

Tabellen voor de binomiale, Poisson, normale, student, chikwadraat en F-verdeling zijn bijgevoegd.