UNIVERSITEIT TWENTE
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

**Tentamen Wiskundige statistiek (191530382) op vrijdag 1 november 2013, 13.45 - 16.45 uur.**

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven en enkele formules (zie de laatste pagina).
Motiveer steeds uw antwoorden. De tabellen zijn separaat bijgevoegd. Een grafische rekenmachine is **niet** toegestaan, een wetenschappelijke (niet programmeerbare) wel.

---

1. We vergelijken de wachttijd bij twee verschillende helpdesks $H_1$ en $H_2$. In beide gevallen is deze normaal verdeeld. Bij $H_1$ met verwachting $\mu_X$ en variantie 2 en bij $H_2$ met verwachting $\mu_Y$ en variantie 3. We willen het verschil $\mu_X - \mu_Y$ schatten alleen de vraag is hoe we om moeten gaan met het verschil in variantie. We doen in totaal 20 onafhankelijke aselecte metingen en de volgende schatters worden bekeken:

   $T_1$ We doen 10 metingen $(X_1, \ldots, X_{10})$ bij helpdesk 1 en 10 metingen $(Y_1, \ldots, Y_{10})$ bij helpdesk 2 en gebruiken als schatter:
   $$\frac{\bar{X}}{\sqrt{2}} - \frac{\bar{Y}}{\sqrt{3}}$$

   $T_2$ We doen 10 metingen $(X_1, \ldots, X_{10})$ bij helpdesk 1 en 10 metingen $(Y_1, \ldots, Y_{10})$ bij helpdesk 2 en gebruiken als schatter:
   $$\bar{X} - \bar{Y}$$

   $T_3$ We doen 9 metingen $(X_1, \ldots, X_9)$ bij helpdesk 1 en 11 metingen $(Y_1, \ldots, Y_{11})$ bij helpdesk 2 en gebruiken als schatter:
   $$\bar{X} - \bar{Y}$$

   a) Ga na welke van deze drie schatters zuiver is.

   b) Ga na welke van de twee schatters $T_2$ en $T_3$ het beste is in de zin van de verwachte kwadratische fout.

   c) Stel dat we, in totaal, $2n$ onafhankelijke aselecte metingen doen. Bepaal een zuivere en consistente schatter voor $\mu_X - \mu_Y$.

z.o.z.

2. De rector van een nederlandse universiteit heeft een nieuw onderwijsmodel geïntroduceerd waarvoor geldt "meedoen is halen". We willen dit toetsen. We hebben de volgende cijfers van een tentamen:

$$4.8, 5.2, 5.5, 5.6, 5.7, 6.4, 6.5, 7.3, 7.8, 8.2, 8.7, 9.2, 9.4, 9.7, 9.9$$

We gaan er van uit dat de cijfers uniform verdeeld zijn over het interval $[\theta, 10]$

a) Toon aan dat $\min(X_1, \ldots, X_{15})$ de meest aannemelijke schatter van $\theta$ is.

b) We willen de nulhypothese $\theta \geq 5.5$ toetsen tegen de alternatieve hypothese $\theta < 5.5$ met onbetrouwbaarheidsdrempel 0.05. Stel een toets op voor deze nulhypothese aan de hand van het aannemelijkheidsquotiënt. Ga na of u de nulhypothese verwerpt op basis van de hierboven gegeven resultaten van het tentamen.

De rector constateert dat op de werkcolleges slechts 90% van de studenten aanwezig is en dat dus slechts 90% echt "meedoet" aan het vak. Op basis hiervan past hij zijn nulhypothese aan tot een slagingspercentage van minstens 90% met als alternatieve hypothese een slagingspercentage van onder de 90%. Hij is onder deze aangepaste omstandigheden echter niet meer zo zeker over de onderliggende verdeling.

c) Stel een verdelingsvrije toets op voor deze nulhypothese met onbetrouwbaarheidsdrempel 0.05. Verwerpt U de nulhypothese?

3. Een groep studenten is bezig met een eiergooiwedstrijd. De kampioen gooit 10 keer een ei over een afstand van:

$$18.90, 20.88, 22.06, 22.44, 22.46, 24.40, 24.65, 25.20, 25.76, 28.82$$

meter. De afstanden zijn gesorteerd weergegeven. We gaan ervan uit dat de gegooide afstand normaal verdeeld is.

a) Bepaal een schatting voor de verwachting van de gegooide afstand.

b) Bepaal een 95% betrouwbaarheidsinterval voor de verwachte afstand.

c) Een deelnemer valt op dat geen enkele gooi van onze kampioen binnen het betrouwbaarheidsinterval valt en geeft aan dat zijn betrouwbaarheidsinterval dus eigenlijk niet correct kan zijn. Geef aan of u het met deze redenering eens bent en waarom.

4. Een jongen van 16 heeft een discussie met zijn moeder over de levensduur van zijn vissen. Hij heeft dit altijd gedetailleerd bijgehouden en van maar liefst 2000 vissen de levensduur genoteerd. Volgens zijn moeder is de gemiddelde levensduur van dit soort vissen in gevangenschap 3 jaar. De nulhypothese is dat de gemiddelde levensduur 3 jaar is en de alternatieve hypothese is dat de levensduur minder dan 3 jaar is. We nemen aan dat de levensduur exponentieel verdeeld is met onbekende $\lambda$. Dus de verwachte levensduur is $\frac{1}{\lambda}$ en de variantie $\frac{1}{\lambda^2}$. Onder de nulhypothese geldt $\lambda = \frac{1}{3}$.

   We hebben op basis van de data:

$$\frac{1}{2000}\sum_{i=1}^{2000} x_i = 2.74, \qquad \frac{1}{2000}\sum_{i=1}^{2000} x_i^2 = 15.33$$

$$\frac{1}{2000}\sum_{i=1}^{2000} x_i^3 = 129.75, \qquad \frac{1}{2000}\sum_{i=1}^{2000} x_i^4 = 1455.9$$

   a) Toets de nulhypothese op basis van een schatter voor het ~~steekproef~~ populatie gemiddelde

   $\alpha_0 = 0{,}001$

$$\bar{X} = \frac{1}{2000}\sum_{i=1}^{2000} X_i$$

   Gezien het grote aantal waarnemingen kunnen we aannemen dat $\bar{X}$ bij benadering normaal verdeeld is.

   b) Toets de nulhypothese op basis van een schatter voor het ~~steekproef~~ tweede moment:

$$M_2 = \frac{1}{2000}\sum_{i=1}^{2000} X_i^2$$

   Gezien het grote aantal waarnemingen kunnen we aannemen dat $M_2$ bij benadering normaal verdeeld is. Verder geldt:

$$E(X_i^2) = \frac{2}{\lambda^2}, \qquad \mathrm{var}(X_i^2) = \frac{20}{\lambda^4}$$

   c) Welke toets heeft het grootste onderscheidend vermogen als de verwachte levensduur in werkelijkheid 2.5 jaar is.

Tentamen Wiskundige statistiek (191530382) op vrijdag 1 november 2013, 13.45 - 16.45 uur.

---

**Enige formules bij het tentamen Wiskundige Statistiek**

Aannemelijkheidsquotiënt:

$$\Lambda = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} \prod_{i=1}^{n} g(x_i, \theta)}{\sup_{\theta \in \Theta} \prod_{i=1}^{n} g(x_i, \theta)}$$

---

Tabellen voor de binomiale, Poisson, normale, student, chikwadraat en $F$-verdeling zijn bijgevoegd.

---

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Vraagstuk | 1a. | 3 punten | Vraagstuk | 1b. | 6 punten | Vraagstuk | 1c. | 5 punten |
| Vraagstuk | 2a. | 4 punten | Vraagstuk | 2b. | 6 punten | Vraagstuk | 2c. | 6 punten |
| Vraagstuk | 3a. | 2 punten | Vraagstuk | 3b. | 5 punten | Vraagstuk | 3c. | 4 punten |
| Vraagstuk | 4a. | 4 punten | Vraagstuk | 4b. | 4 punten | Vraagstuk | 4c. | 5 punten |