Faculteit der Toegepaste Wiskunde

Kenmerk : TW99/T-MA/99-10/dd
Datum : 26 januari 1999

Universiteit Twente

Vak : **Complexe Functietheorie - [A]**
SP : 2,5 SP
Vakcode : 152025

Datum : 27 januari 1999
Tijdstip : 9.00 - 12.00 uur
Plaats : TWRC-A101

TW-studenten die studeren volgens de afstudeerrichting FTS en die niet aan hun huiswerkverplichtingen hebben voldaan dienen een aangepast tentamen [B] van 4 SP af te leggen.

1. (a) Geef de definitie van harmonische functie.

   (b) Zet in het kort uiteen hoe harmonische en analytische functies samenhangen.

   (c) Stel de functie u is harmonisch binnen en op een gesloten Jordan-pad γ. Als bovendien u = constant op γ, bewijs dan dat u = constant op het inwendige van γ.
   Aanwijzing: gebruik (een gevolg van) de Maximum Modulus Stelling.

2. De functies g en h zijn gegeven door

$$g(z) = ze^{\frac{1}{z^2}} \quad ; \quad h(z) = \frac{1}{z^2(1-z^2)}$$

   Bepaal voor beide functies:

   (a) de Laurentreeksen rond $z = 0$, alsmede de convergentieverzamelingen van deze reeksen;

   (b) de aard van de singulariteit in $z = 0$, alsmede het residu.

3. Zij a een reëel getal, $a > 0$.
   De functie f is gedefinieerd door $f(z) = \dfrac{e^{iaz}}{(1+z^2)^2}$.

   (a) Bepaal de polen en hun ordes van de functie f.

   (b) Zij L_R de halve-cirkelboog in het bovenhalfvlak van R naar $-R$.
   Toon aan dat $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{L_R} f(z)dz = 0$.

   (c) Bereken $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{(1+x^2)^2}dx$.

4. Gegeven is de functiereeks $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ met algemene term

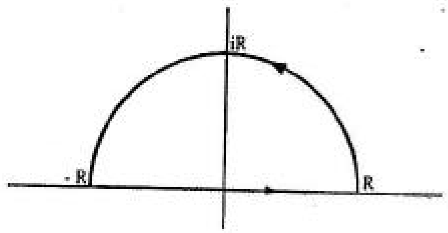
$$f_n(z) = \frac{\tan(nz)}{n^2} \qquad (n > 0)$$

(a) Bewijs dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ uniform convergeert op $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 1\}$.

(b) Bewijs dat de som $s(z)$ analytisch is op $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 1\}$.

5. Bepaal $CH \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3 - 1} dx$.

Aanwijzing: integreer $\frac{e^{iz}}{z^3 - 1}$ over een contour van de vorm:



6. (a) Formuleer de stelling van Rouché.

(b) Laat voor $\alpha \in \mathbb{C}$ de polynoom p gegeven zijn door

$$p(z) = \alpha z^n + z + 1.$$

Bewijs nu dat p precies één nulpunt heeft in de cirkelschijf $\{z \mid |z| \leq 2\}$ indien $|\alpha| < 2^{-n}$.

Normering:

1 a : 1 b : 2 c : 3	2 a : 4 b : 2	3 a : 2 b : 2 c : 4	4 a : 3 b : 2	5 : 7	6 a : 2 b : 2

Totaal: 36 + 4 = 40 punten