

Faculteit der Toegepaste Wiskunde

Kenmerk : TW2003/T-FAA/72/dd

Datum : 7 juli 2003



Vak : **Complexe Functietheorie** [A - 2½ SP]

Vakcode : 152025

Datum : donderdag 14 augustus 2003

Tijdstip : 9.00 - 12.00 uur

*Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Een rekenmachine mag niet gebruikt worden.*

1. Gegeven de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} z^n$$

2

(a) Bepaal de convergentiestraal van deze reeks.

3

(b) Bepaal het convergentieverzameling (G) van deze reeks.

Stel $s(z)$, met $z \in G$, is de som van de reeks.

2

(c) Geef de Taylorreeks van de afgeleide $s'(z)$ rond $z = 0$.

2

(d) Bepaal de convergentiestraal en het convergentieverzameling van de reeks uit onderdeel (c).

3

2. Bepaal de analytische functie $f = u + iv$, u en v reëelwaardig, waarvoor geldt

(1) $u(x, y) = 4x^3 - 12xy^2 - 2x + 5$

(2) $f(0) = 5 - 3i$.

Druk $f(z)$ uit in z .

7

3. Bewijs dat

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(R)} \frac{e^{zt}}{(z+1)^n} dz \right] = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad t > 0,$$

waarbij $\gamma(R)$ het lijnstuk is dat $-iR$ verbindt met $+iR$.

Z.O.Z.

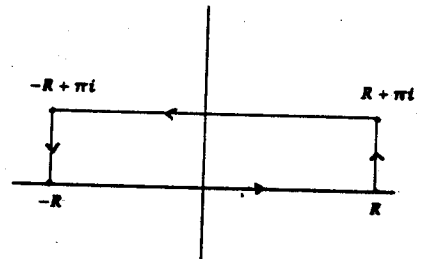


S.V. ARAGO

8 4. Bewijs

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \pi/4$$

Aanwijzing: Integreer $\frac{1}{e^z + e^{-z}}$ over een contour van de vorm



3 5. (a) Bepaal alle singulariteiten van $\frac{1}{z} \sqrt{1+z^2}$, waarbij $\sqrt{}$ slaat op hoofdwaarde.
2 (b) Bereken

$$\oint_{C_1} \frac{1}{z} \sqrt{1+z^2} dz,$$

waarbij $C_1 = \{z \mid |z| = 1\}$

4 6. Bepaal het aantal nulpunten (gerekend naar multipliciteit) van

$$3z^5 - 12z^3 + 3z^2 - z + 4$$

binnen de cirkel $C_1 = \{z \mid |z| = 1\}$

(Formuleer de gebruikte stelling(en) kort maar volledig)

Normering:

1	a : 2	2	: 3	3	: 7	4	: 8	5	a : 3	6	a : 4
	b : 3								b : 2		
	c : 2										
	d : 2										

Totaal: 36 + 4 = 40 punten