Kenmerk : TW2002/T-MA/3/dd
Datum : 21 januari 2003

Vak : **Complexe Functietheorie - [A]**
SP : 2,5 SP
Vakcode : 152025

Datum : 28 januari 2004
Tijd : 9.00 – 12.00 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Een rekenmachine mag *niet* gebruikt worden.

6 1. De functie $f(z)$ is analytisch voor alle $z(= x + iy)$; $x, y \in \mathbb{R}$. Stel $\mathrm{Im}(f) = v$. Bepaal $f(z)$ als bovendien gegeven is dat
   (a) $v_x = 12xy - 6x$.
   (b) $f(0) = 3 - 2i$.
   (c) $f'(0) = 1$.

   Aanwijzing: Bepaal eerst $f'(z)$.

2. De functies g en h zijn gegeven door

$$g(z) = ze^{\frac{1}{z^2}} \quad ; \quad h(z) = \frac{1}{z^2(1 - z^2)}$$

   Bepaal voor beide functies:

4 (a) de Laurentreeksen rond $z = 0$, alsmede de convergentieverzamelingen van deze reeksen;
2 (b) de aard van de singulariteit in $z = 0$, alsmede het residu.

3. Zij a een reëel getal, $a > 0$.
   De functie f is gedefinieerd door $f(z) = \dfrac{e^{iaz}}{(1 + z^2)^2}$.

2 (a) Bepaal de polen en hun ordes van de functie f.
2 (b) Zij L_R de halve-cirkelboog in het bovenhalfvlak van R naar $-R$.
   Toon aan dat $\displaystyle\lim_{R \to \infty} \int_{L_R} f(z)dz = 0$.
4 (c) Bereken $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{(1 + x^2)^2}dx$.

Z.O.Z.

S.V. ARAGO

4. Gegeven is de functiereeks $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ met algemene term

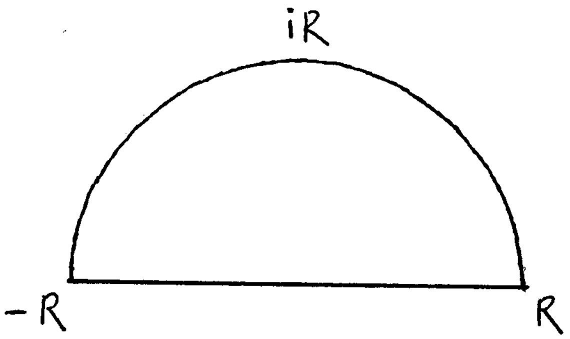
$$f_n(z) = \frac{\tan(nz)}{n^2} \qquad (n > 0)$$

3 (a) Bewijs dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ uniform convergeert op $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 1\}$.

2 (b) Bewijs dat de som $s(z)$ analytisch is op $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 1\}$.

7 5. Bepaal $CH \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3 - 1} dx$.

Aanwijzing: integreer $\frac{e^{iz}}{z^3 - 1}$ over een contour van de vorm:



2 6. (a) Bepaal het aantal nulpunten (gerekend naar multipliciteit) van $p(z) = z^7 + 5z^3 + 2z - 1$ binnen de cirkel $C = \{z \mid |z| = 1\}$.

2 (b) Bereken $\oint_C \frac{p'(z)}{p(z)} dz$.

Normering:

1 : 6	2	a	: 4	3	a	: 2	4	a	: 3	5 : 7	6	a	: 2
		b	: 2		b	: 2		b	: 2			b	: 2
					c	: 4							

Totaal: 36 + 4 = 40 punten