S.V. Arago

Afdeling Toegepaste Wiskunde
Universiteit Twente

Complexe Functietheorie (152025)

Donderdag 22 juni 2006, 09.00–12.00 uur

- Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden en moeten exact gegeven worden.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.
- Degenen die aan de huiswerkverplichtingen hebben voldaan, hoeven de opgave 4(a), 6(a) en 7(a) niet te maken om toch de toegekende normeringspunten te krijgen. De informatie in deze (a)-onderdelen kan de overigens oplossing in een (b)-onderdeel richting geven.

1. Los op voor $z \in \mathbb{C}$ (geef ook in een tekening de oplossingen aan).

   (a) $z^2 + 2z + i = 0$.

   (b) $\cos z \in \mathbb{R}$.

2. De functie $f(z)$ is analytisch op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ en als gebruikelijk noteren we $z = x + iy$ en $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$ en $\operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$.

   (a) Formuleer de Cauchy-Riemann relaties vor $u(x, y)$ en $v(x, y)$.

   (b) Gegeven is $u(x, y) = xy$ en $f(1 + i) = 1 + i$. Bepaal $f(z)$ als uitdrukking in z.

   (c) Door overgang op poolcoördinaten ($z = re^{i\varphi}$) worden u en v als functies van (r, ϕ) vastgelegd.

   Bewijs: $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \phi}$ en $\dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \phi}$.

3. Bepaal de Laurentreeks van de functie $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ welke convergent is in de volgende gebieden.

   (a) $\{z \mid 0 < |z| < 1\}$

   (b) $\{z \mid 1 < |z| < 2\}$

4. Gegeven is de functie $f(z) = \dfrac{\sin z}{5z^3}$.

   (a) Bewijs dat $z = 0$ een tweede orde pool van $f(z)$ is.

   (b) Bereken met behulp van de residuenstelling $\displaystyle\oint_{C_1} f(z)\,dz$, waarbij C_1 de positief geörienteerde cirkel met middelpunt 0 en straal 1 is.

5. Zoals gebruikelijk noteren we de Laplacegetransformeerde van een functie f met $\mathcal{L}(f)$. Bepaal $f(t)$ voor $t > 0$ als gegeven is $\mathcal{L}\{f\}(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$.
   Hint: Bereken in de inverse Laplaceformule de integraal m.b.v. residue-theorie over de kromme

6. (a) Bewijs: als $f(z)$ een Möbius transformatie is, dan is $f(z)$ te schrijven als een product van een translatie, een rotatie, een vermenigvuldiging en de inversie afbeelding.

   (b) Bepaal een Möbius transformatie die het halfvlak $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) \geq 1\}$ afbeeldt op de eenheidschijf $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq 1\}$. (Maak eerst een schets.)

7. (a) Formuleer de stelling van Rouché (inclusief de voorwaarden).

   (b) Bewijs dat alle nulpunten van $z^6 - 5z^2 + 10 = 0$ liggen in $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.

NORMERING

1	(a)	2	**2**	(a)	1	**3**	(a)	3	**4**	(a)	1	**5**	5	**6**	(a)	1	**7**	(a)	2
	(b)	2		(b)	3		(b)	3		(b)	4				(b)	3		(b)	3
				(c)	3														

Totaal: $36 + 4 = 40$ punten.